

# Räumlich aufgelöste MR

---

## Doktoranden Training der Deutschen Sektion

## der ISMRM



**O. Speck**

**Sektion MR-Physik  
Diagnostische Radiologie  
Universitätsklinik Freiburg**

# Übersicht

---

- **Einleitung**
- **Gradienten und Bildgebung**
- **Fourier-Transformation**
- **k-Raum und seine Eigenschaften**
- **Reisen im k-Raum**
- **Diskrete, sequentielle Datenaufnahme**
- **Räumlich selektive HF-Pulse**

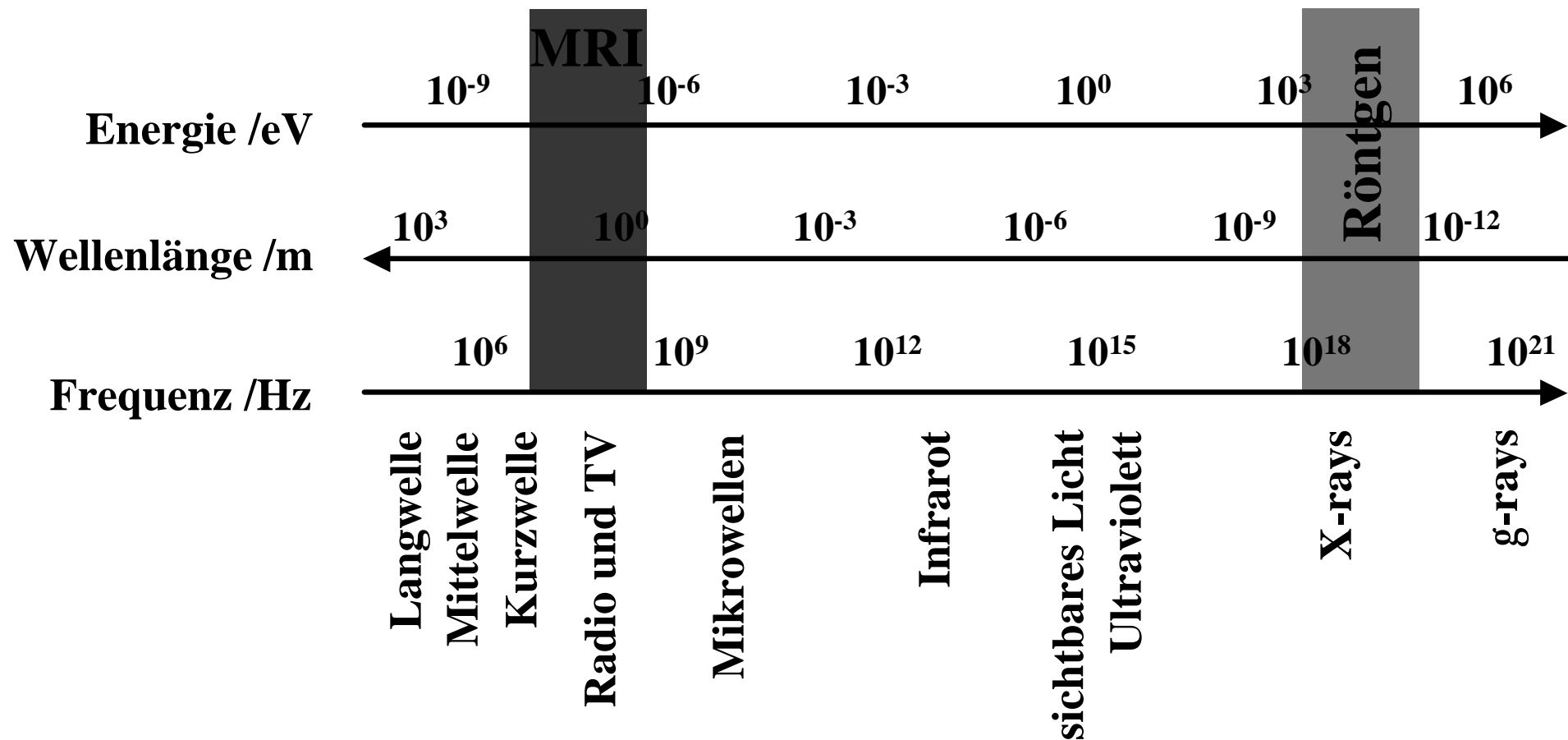
# Historie

---

- **1946: Entdeckung der NMR durch Bloch und Purcell (Nobel Preis in 1952) Zavoisky nicht vergessen!**
- **bis 1970: Chemische Analyse/Strukturbestimmung**
- **1971: T1-Unterschiede Gewebe/Tumor (Damadian)**
- **1973: Erstes MR-Bild (Lauterbur)**
- **1975: Fourier Bildgebung eingeführt von Ernst (Nobel Preis in 1991)**
- **seit 1984: MRI in der klinischen Routine**

# Bildgebungsproblem in der MR

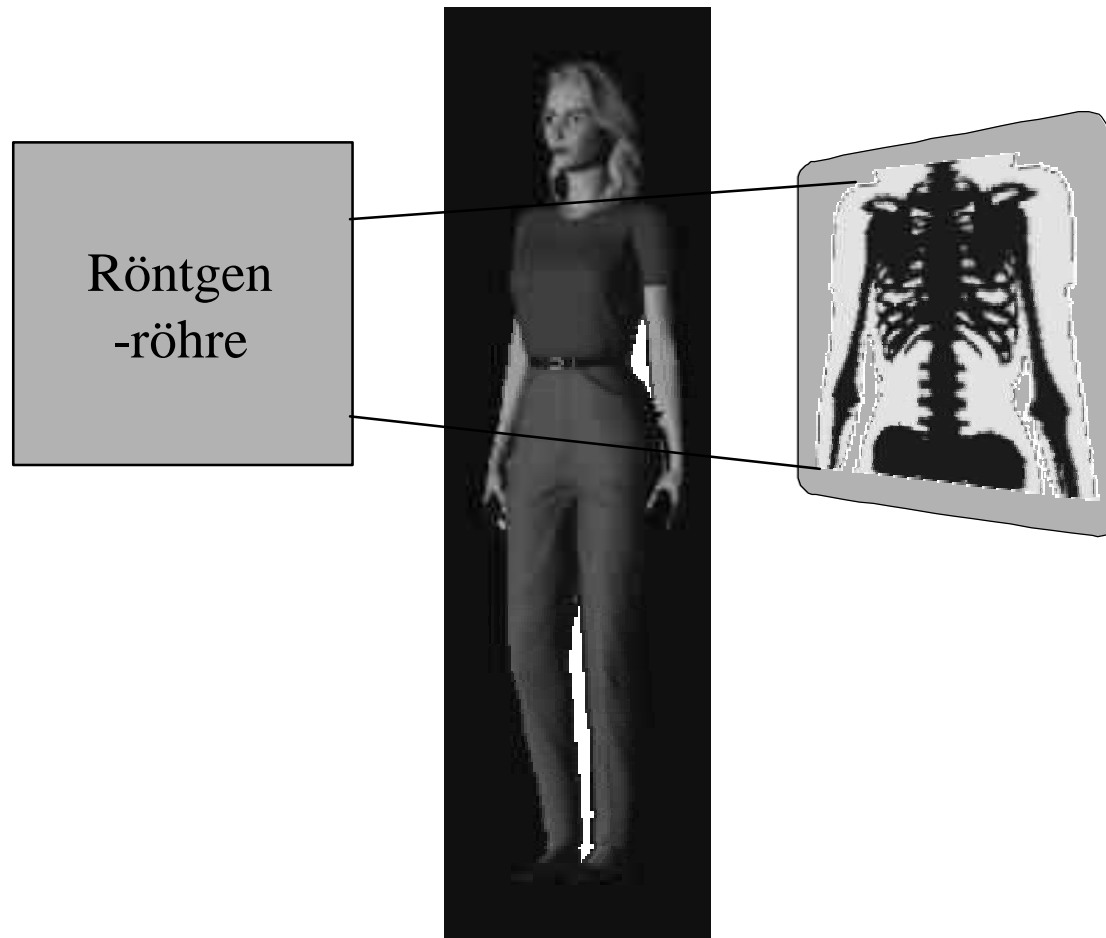
Es gibt zwei Wellenlängenbereiche, in denen biologisches Gewebe für elektromagnetische Wellen transparent ist.



# Herkömmliche Bildgebung

---

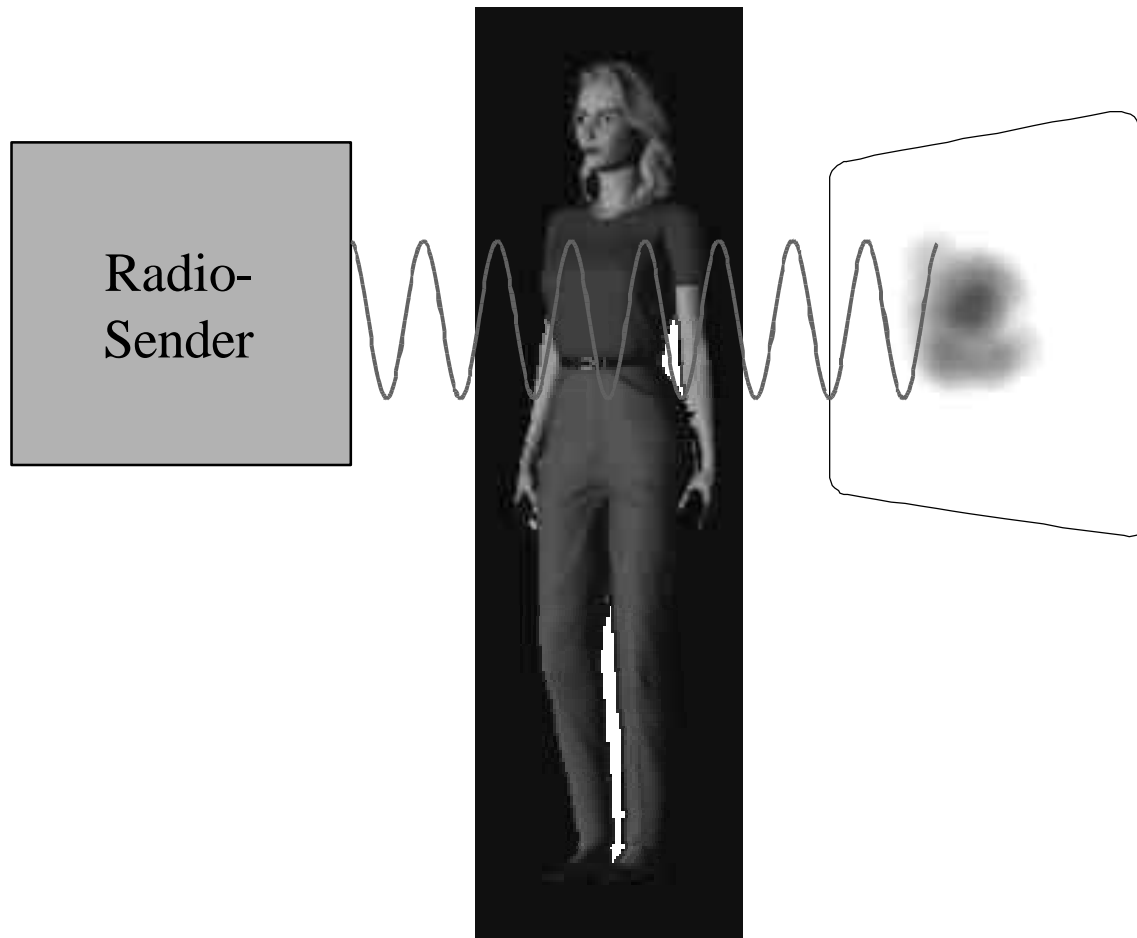
Bei herkömmlichen Bildgebungsverfahren (Röntgen) ist die Abbildung über die Geometrie des Strahlengangs gegeben.



# Auflösungsvermögen

---

**Objekte kleiner als die Wellenlänge können nicht abgebildet werden (geometrische Abbildung nicht möglich!)**

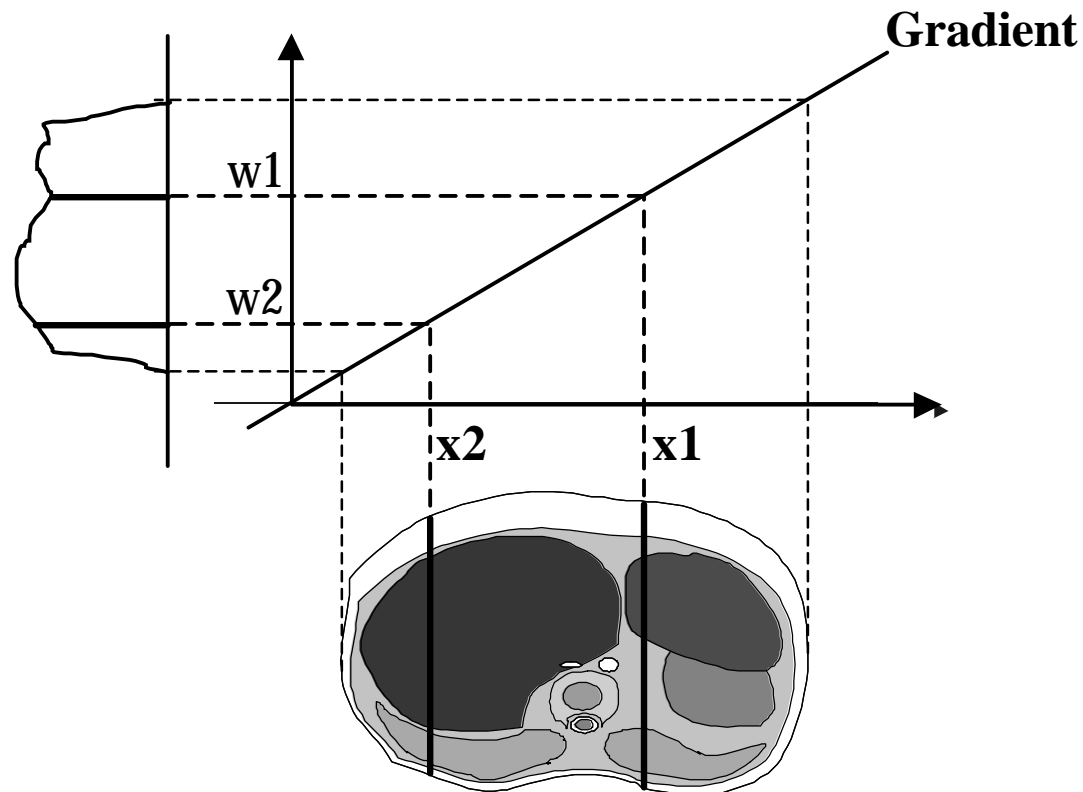


# Lösung für MR-Ortskodierung

---

In einer bekannten magnetischen Feldverteilung (Gradient) stellt die Larmor-Gleichung die Verbindung zwischen Ort und Frequenz her.

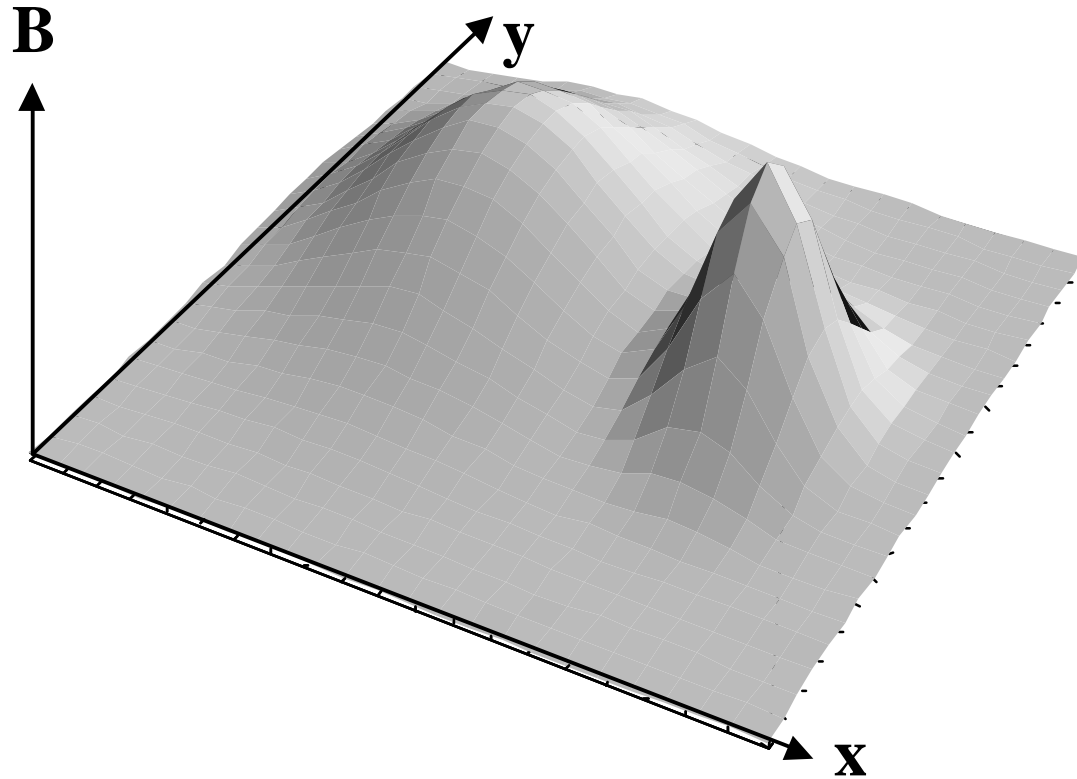
$$\omega = \gamma B$$



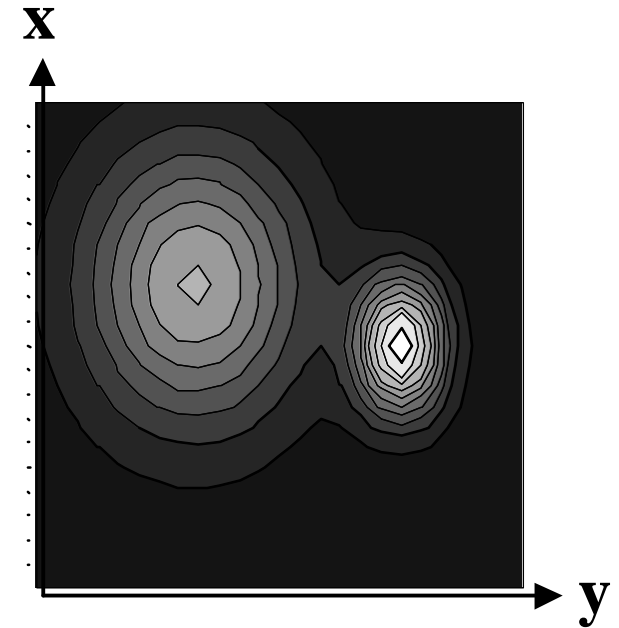
# Beliebige Feldverteilungen

---

Magnetisches Feld



Iso-Flux Graph



**Problem: 2D oder höher - Frequenzen nicht eindeutig**

# Lösung: zeitlich veränderliche Gradientenfelder

---

- Gradient ist im Prinzip ein Tensorfeld:

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{dB_x}{dx} & \frac{dB_x}{dy} & \frac{dB_x}{dz} \\ \frac{dB_y}{dx} & \frac{dB_y}{dy} & \frac{dB_y}{dz} \\ \frac{dB_z}{dx} & \frac{dB_z}{dy} & \frac{dB_z}{dz} \end{bmatrix}$$

- Larmor-Beziehung ist skalare Gleichung:  $\omega = \gamma |\mathbf{B}|$
- $B_z \gg B_x/B_y$  daher ist der Gradient ein Vektorfeld:

$$\vec{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \frac{d|\mathbf{B}|}{dx} & \frac{d|\mathbf{B}|}{dy} & \frac{d|\mathbf{B}|}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dB_z}{dx} & \frac{dB_z}{dy} & \frac{dB_z}{dz} \end{bmatrix}$$

- Messung relativ zur  $\omega_0$  Frequenz:  $\omega = \gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$

# MR-Signal

---

- **Für eine punktförmige Quelle:**

**harmonische Schwingung:**  $S(t) = S(0) e^{i\omega t}$   
(entspricht kontinuierlicher Phasenänderung)

- **Frequenz zeitlich veränderlich**

$$\omega(t) = \gamma \vec{G}(t) \cdot \vec{x} \quad S(t) = S(0) e^{i\gamma \int_0^t \vec{G}(t') \cdot \vec{x} dt'}$$

- **Gesamtsignal:**  $S(t) = \int \rho(\vec{x}) e^{i\gamma \int_0^t \vec{G}(t') \cdot \vec{x} dt'} d\vec{x}$

$$\vec{k} = \frac{1}{2\pi} \gamma \int_0^t \vec{G}(t) dt$$

# MR-Bild

---

- **Inversion der Signalgleichung:**

$$\rho(\vec{x}) = \int S(t) e^{-i 2\pi \vec{k}\vec{x}} d\vec{k}$$

$$\vec{k} = \frac{1}{2\pi} \gamma \int_0^t \vec{G}(t) dt$$

- **Graphische Repräsentation ist k-Raum**
- **noch nicht klar?**

# Beispiel: Frequenzkodierung

---

Das Signal ist die Summe verschiedener Frequenzkomponenten.

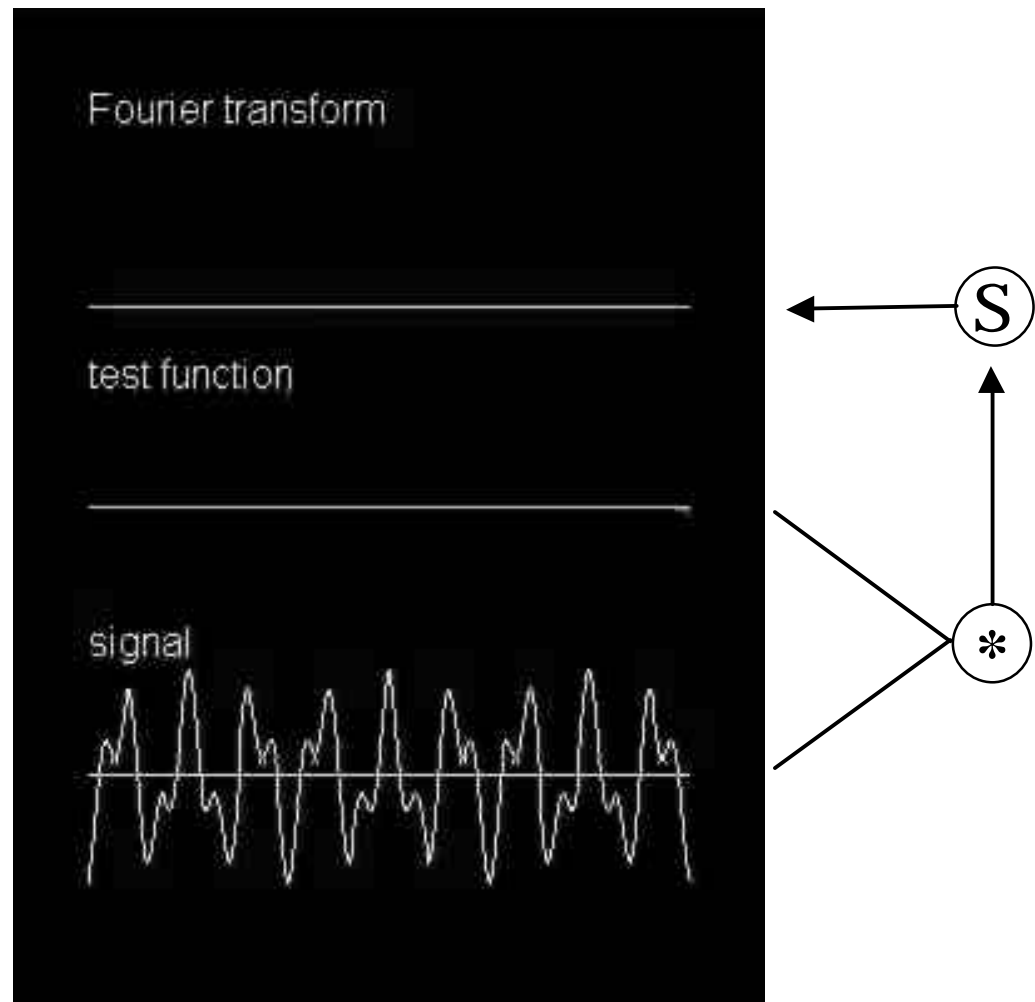


**Zeit**

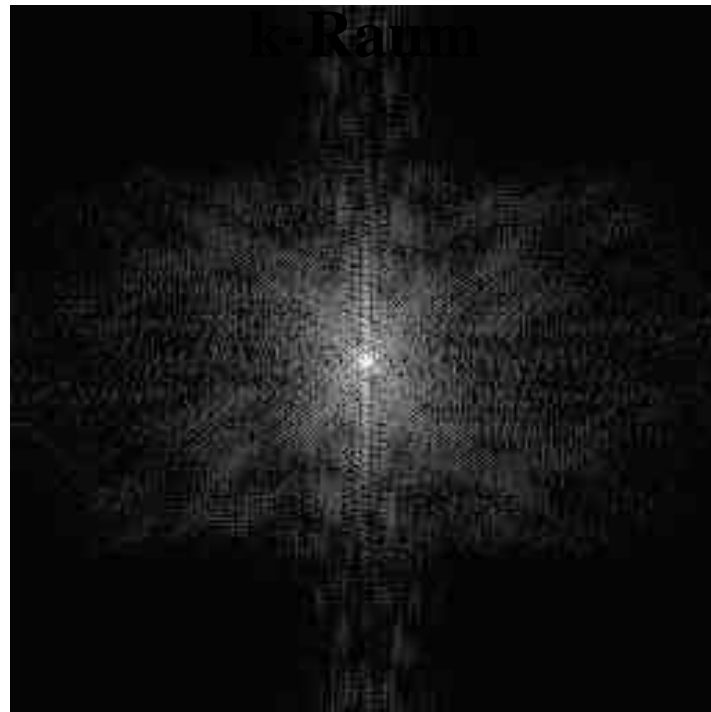
# Fourier-Zerlegung

---

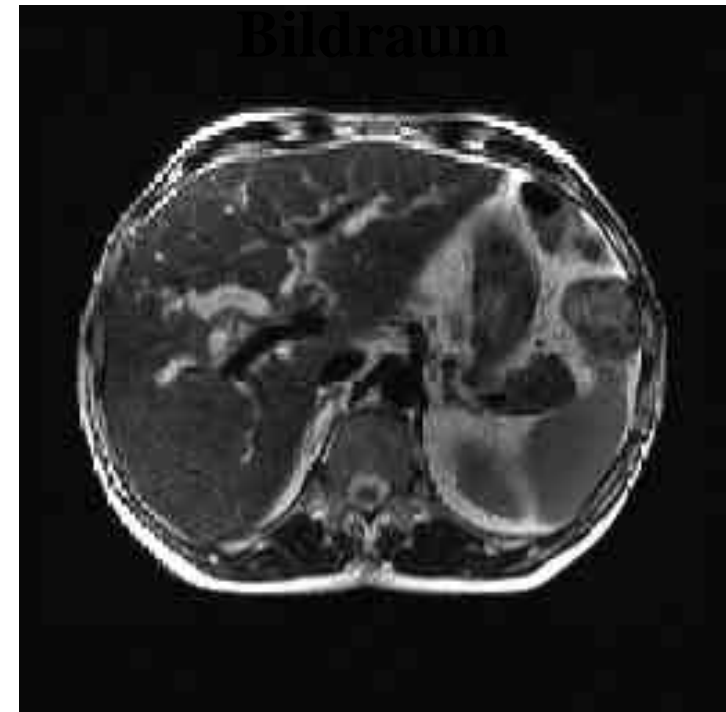
Mittels FT werden diese Frequenzkomponenten separiert



# Beispiel: Phasenkodierung



2DFT  
→



$$\begin{array}{c} \uparrow \\ k_y = g t \textcircled{G_P} \\ \leftarrow \textcircled{t} G_R \rightarrow \\ \downarrow \\ k_x = g \textcircled{t} G_R \end{array}$$

2DFT  
→

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ y = n / g G_P \\ \leftarrow \textcircled{t} G_R \rightarrow \\ \downarrow \\ x = n / g G_R \end{array}$$

# Fourier-Paare

---

- (Skalierung unterschlagen)

- **Konstante**

- $e^{2\pi i \nu t}$

- **Dirac Serie (Abstand T)**

- $\text{III}(t/T)$  (**Shah-Funktion**)

- $e^{-at}$

- **Rechteck (-T/2 bis T/2)**

- $\Pi(t/T)$

- **Gauß:**

- $e^{-at^2}$

**Dirac Delta bei 0:**  $d(0)$

**Dirac Delta bei n:**  $d(\nu)$

**Dirac Serie (1/T)**

$\text{III}(x T)$

**Lorenz:**  $\frac{a}{a^2 + \nu^2} + i \frac{\nu}{a^2 + \nu^2}$

$\sin(\pi \nu T) / (\pi \nu T)$

$\text{sinc}(\nu T)$

**Gaus:**  $e^{-\frac{\nu^2}{4a}}$

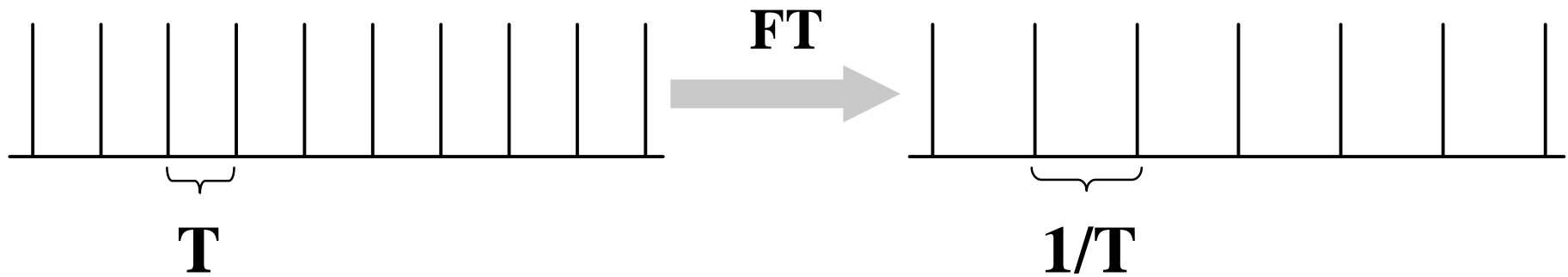
# Beispiele

---

$\text{III}(t/T)$

Shah-Funktion

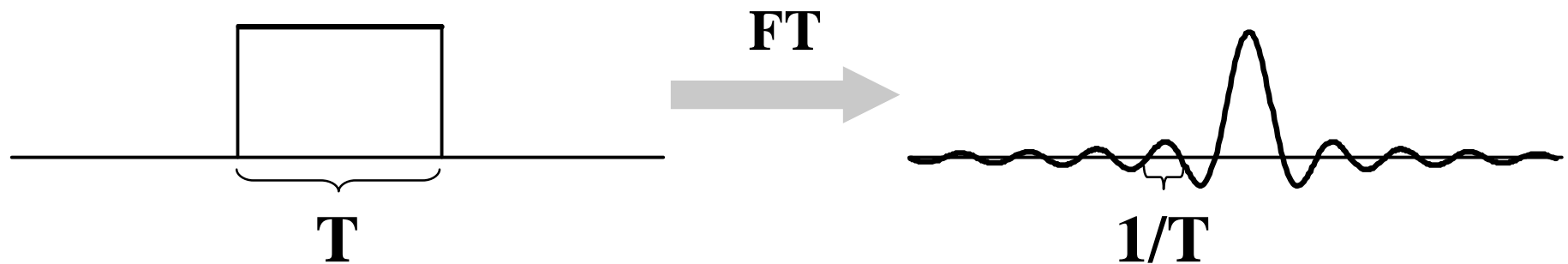
$\text{III}(x T)$



$P(t/T)$

Rechteck-Funktion

$\text{sinc}(x T)$



# Eigenschaften der FT

---

- **Linearität**

$$n \text{ FT}\{a(t)\} + m \text{ FT}\{b(t)\} = \text{FT}\{n a(t) + m b(t)\}$$

- **Faltungstheorem**

$$\text{FT}\{a(t) b(t)\} = \text{FT}\{b(t)\} \otimes \text{FT}\{a(t)\}$$

- **Fourierschifttheorem**

$$\text{FT}\{a(t)\} = A(x); \text{FT}\{a(t) e^{i\alpha t}\} = A(x - a)$$

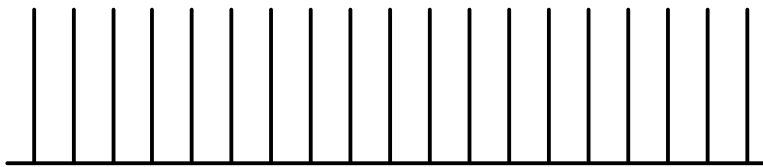
- **Symmetrie**

**falls  $a(t)$  reelwertig:**  $A(-\omega) = \overline{A(\omega)}$

# Beispiel Faltung

---

$$\text{III}(t/T) \Pi(t/D)$$



FT



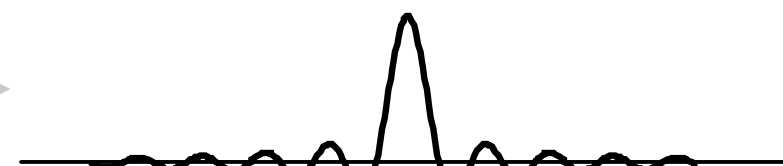
$$\text{III}(x T) \otimes \text{sinc}(x D)$$



o

⊗

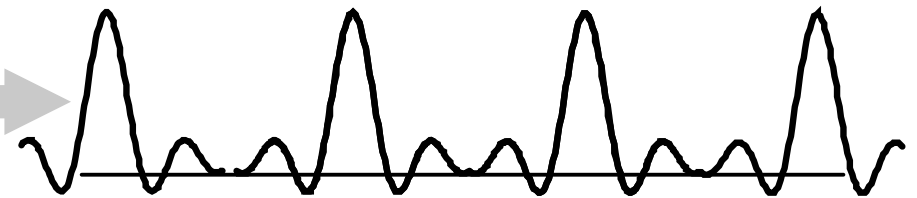
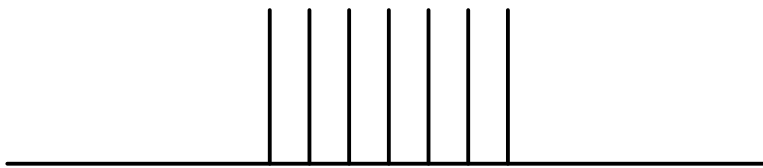
FT



=

=

FT



# k-Raum

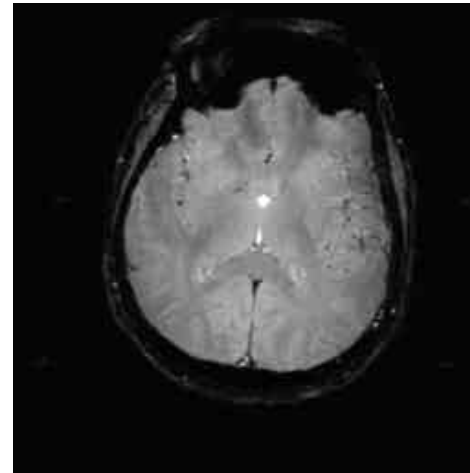
---

- **Die Eigenschaften der FT bestimmen die MR-Bildgebungseigenschaften**
- **k-Raum Formalismus ist unabhängig von der Datenaufnahme**
- **k-Raum Koordinate ist durch das Gradientenschema gegeben**  $\vec{k} = \frac{1}{2\pi} \gamma \int_0^t \vec{G}(t) dt$
- **Eins zu eins Korrespondenz zwischen k-Raum und Bildraum**

# k-Raum Eigenschaften

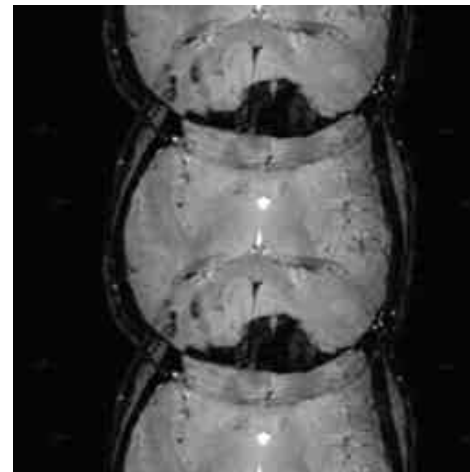
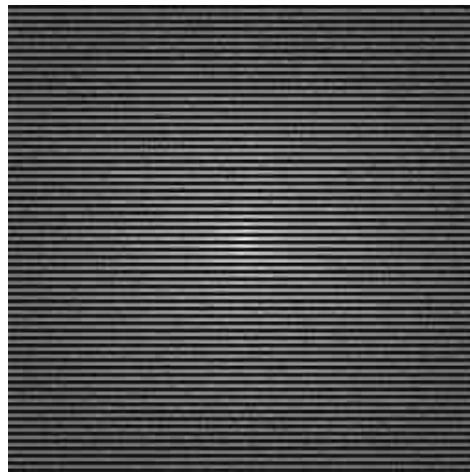
---

**kompletter  
k-Raum**



**Bild**

**halbe  
k-Raum  
Auflösung**



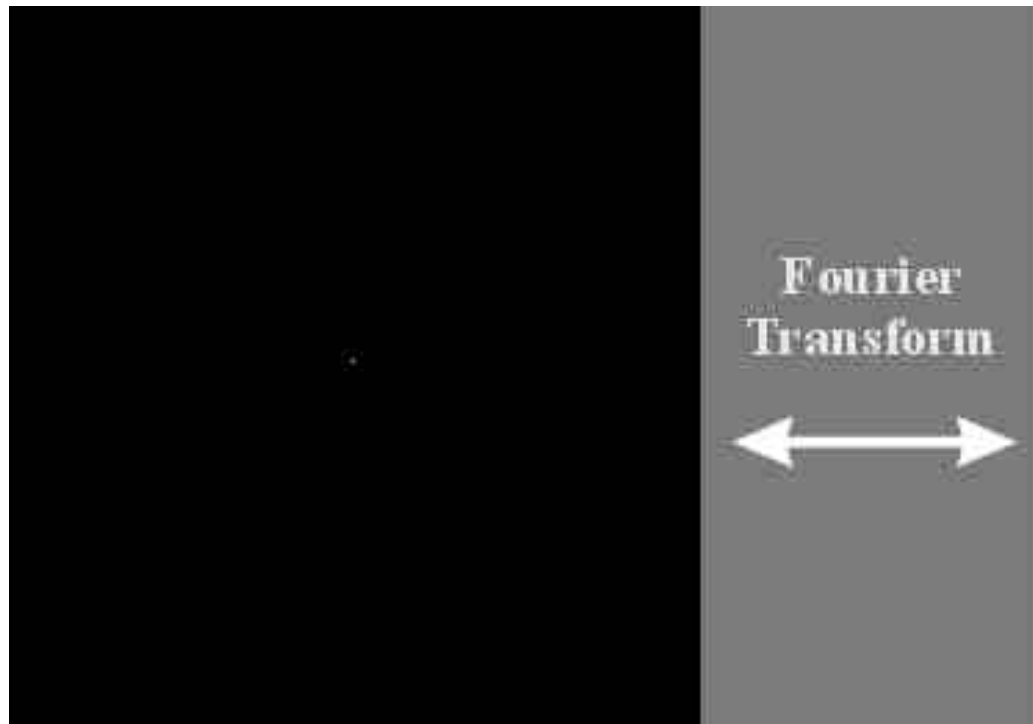
**halbes FOV  
Einfaltungs-  
artefakt**

# k-Raum Eigenschaften

---

**k-Raum**

**Bild**



**Zentrum**

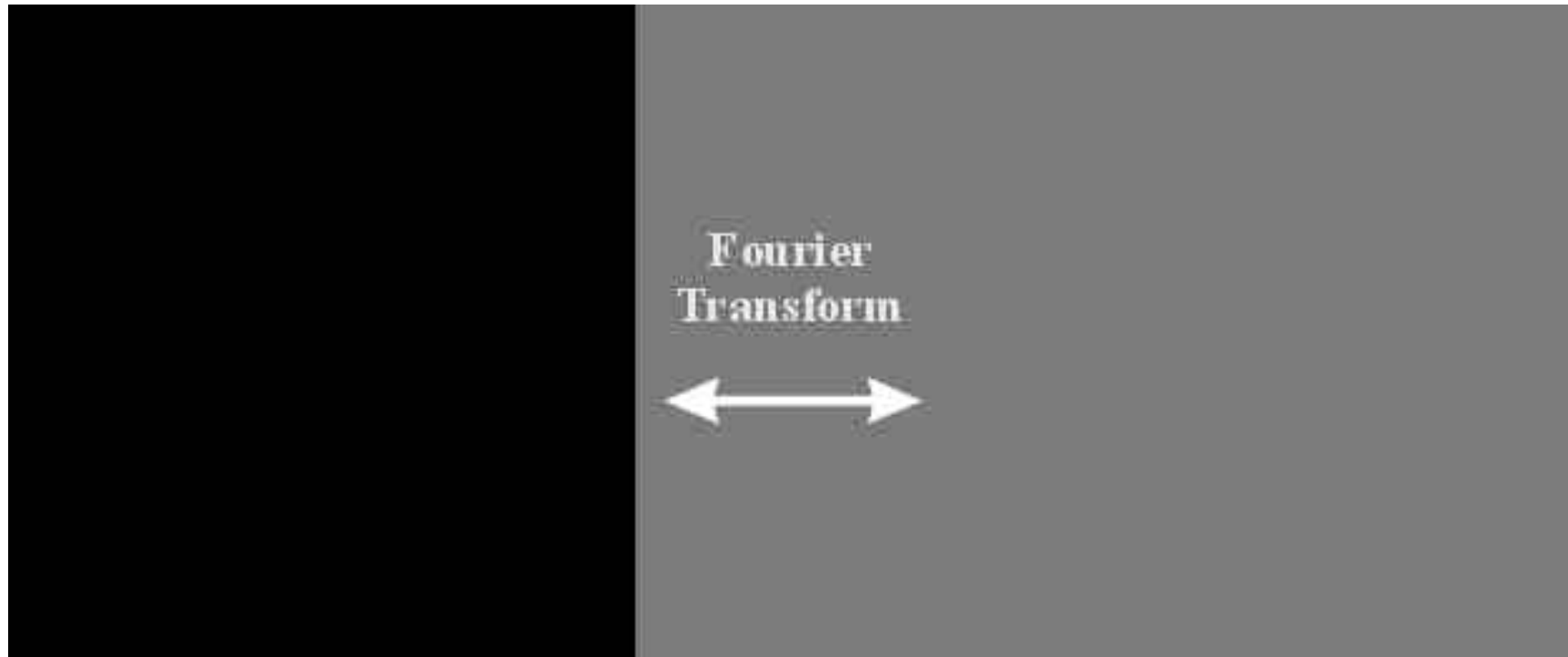
**Intensität/  
Kontrast**

# k-Raum Eigenschaften

---

**k-Raum**

**Bild**



**Peripherie**

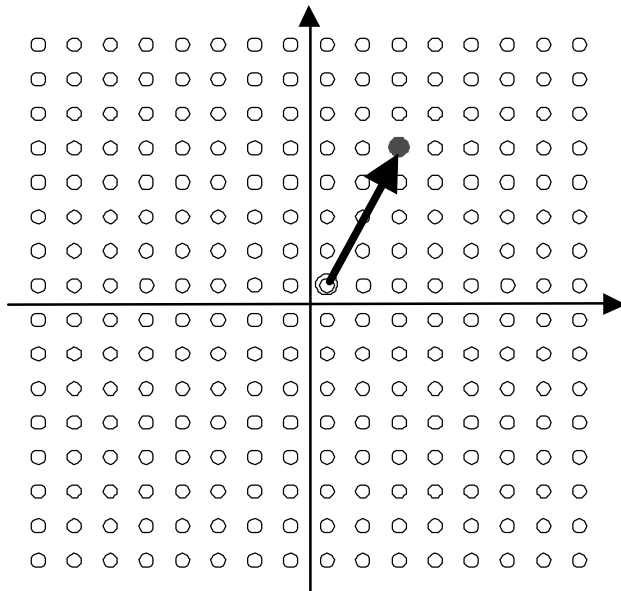
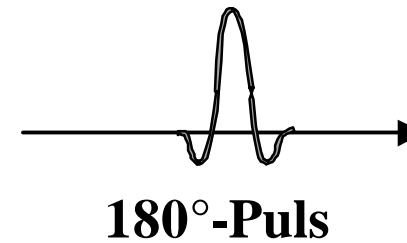
**Kanten**

# **k-Raum in der Realität**

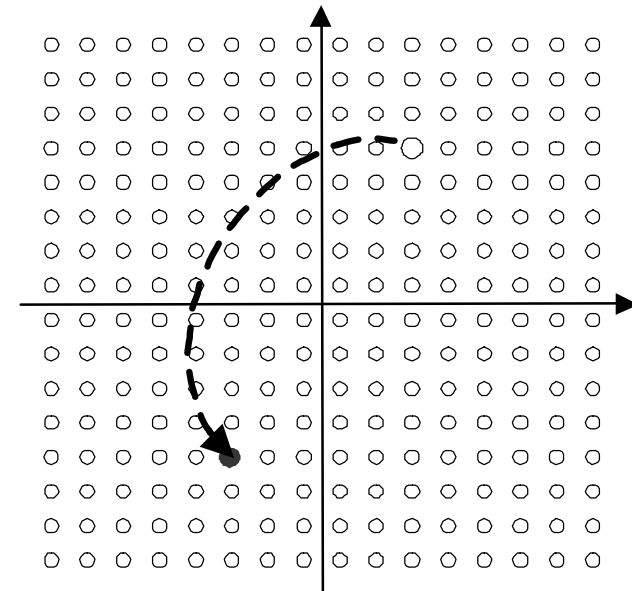
---

- **Die Reihenfolge der Datenaufnahme ist mathematisch irrelevant. In der Realität ist dies entscheidend für die Bildentstehung.**
- **Datenaufnahme ist diskret und sequentiell**
- **Einfluß der Aufnahmegeschwindigkeit**
- **Point-Spread-Funktion**
- **Variationen von Amplitude und Phase während der Aufnahme**

# Reisen im k-Raum



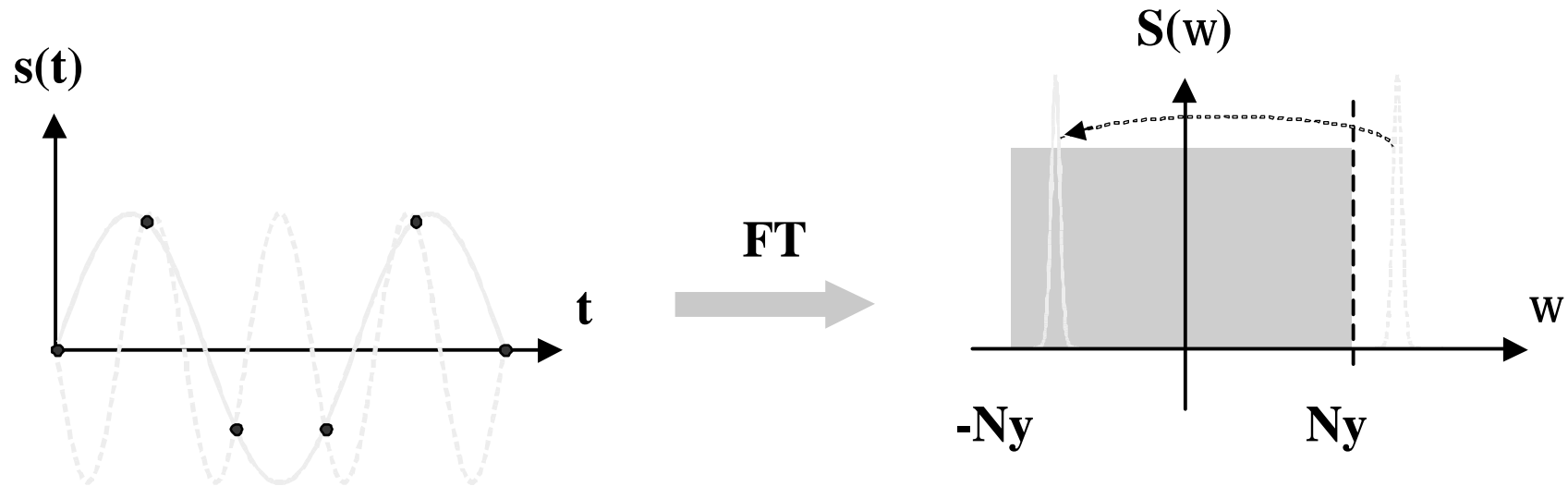
**konstanter Gradient  
gerade Trajektorie**



**Refokussierungspuls  
invertiert Phase**

# Einfaltungen

---

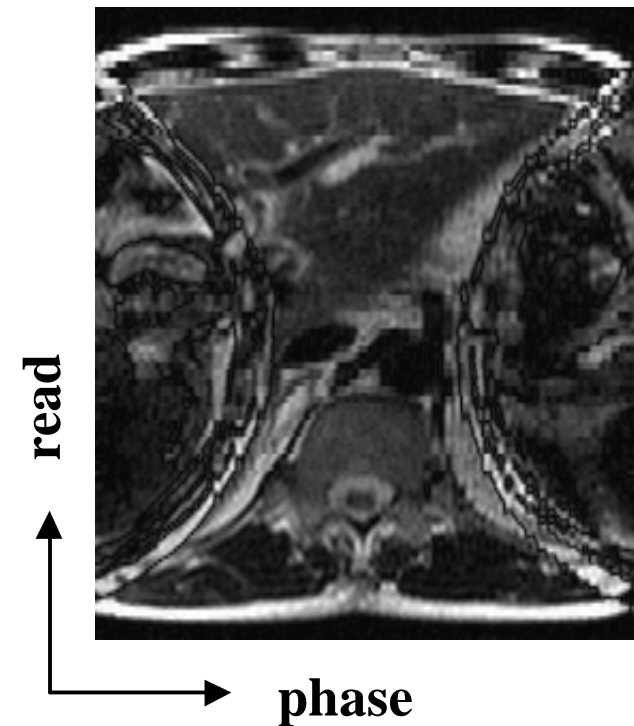
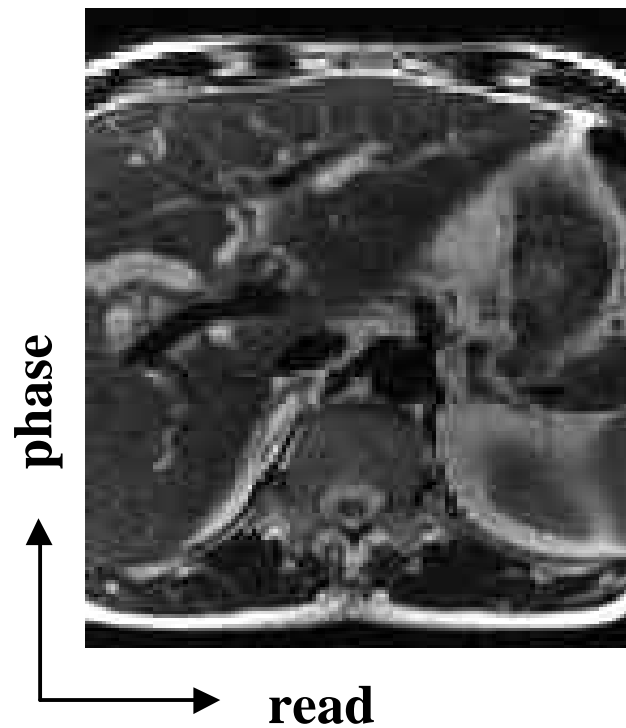


**Frequenzen größer als die halbe Samplingfrequenz (Nyquistfrequenz), werden eingefaltet**

# Einfaltungen

---

**Phasenrichtung: Einfaltungen**  
**Leserichtung: Over-sampling und Filterung**



# Mathematik Einfaltungen

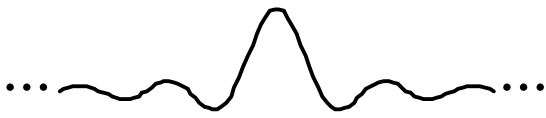
---

$$s_l = s(ld)$$



II

$$s(k) \dots$$



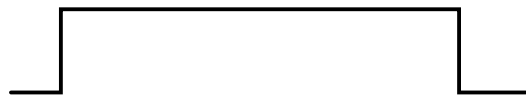
**x**

$$\text{III}\left(\frac{k}{d}\right) \dots$$



**x**

II



$$\tilde{s}_n = \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} s_l e^{i2\pi l n / N}$$

$$\tilde{s}_n = \int \left[ \sum_l \mathbf{d}(k - ld) \right] s(k) e^{i2\pi kn / Nd} dk$$

$$\tilde{s}_n = \text{FT} \left\{ \underbrace{\text{III}\left(\frac{k}{d}\right) \Pi\left(\frac{k}{Nd}\right) s(k)}_{= s_l} \right\} \left( \frac{n}{Nd} \right)$$

k-Raum Dichte = d

k-Raum Ausdehnung = Nd

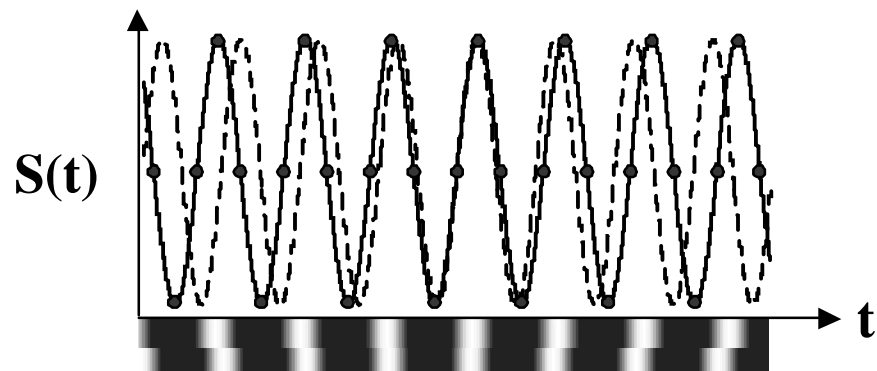
Bild FOV = 1/d

Bild Auflösung = 1/Nd

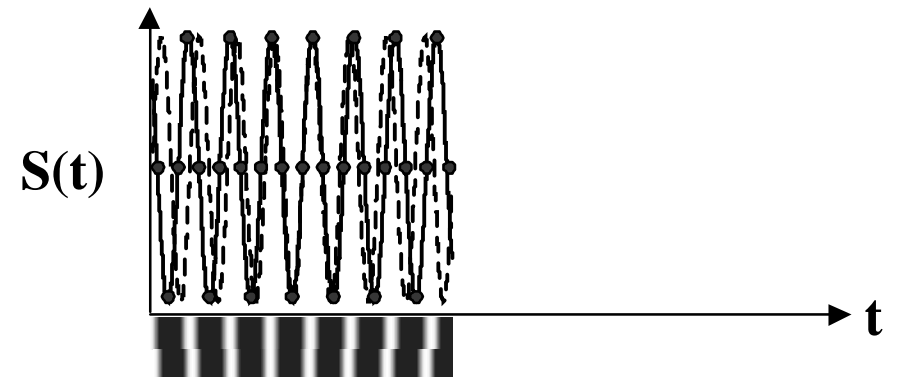
# Geschwindigkeit

---

Geringe Aufnahmebandbreite



Hohe Aufnahmebandbreite



# Aufnahmebandbreite

---

- **Das MR Signal ist bandbreitenunabhängig**
- **Das Rauschen ist gleichverteilt**
- **Höhere Aufnahmebandbreite bedingt höhere Filterbandbreite**
- **Rauschen ist proportional zur Quadratwurzel der Bandbreite**
- **SNR ist umgekehrt proportional zur Bandbreite**

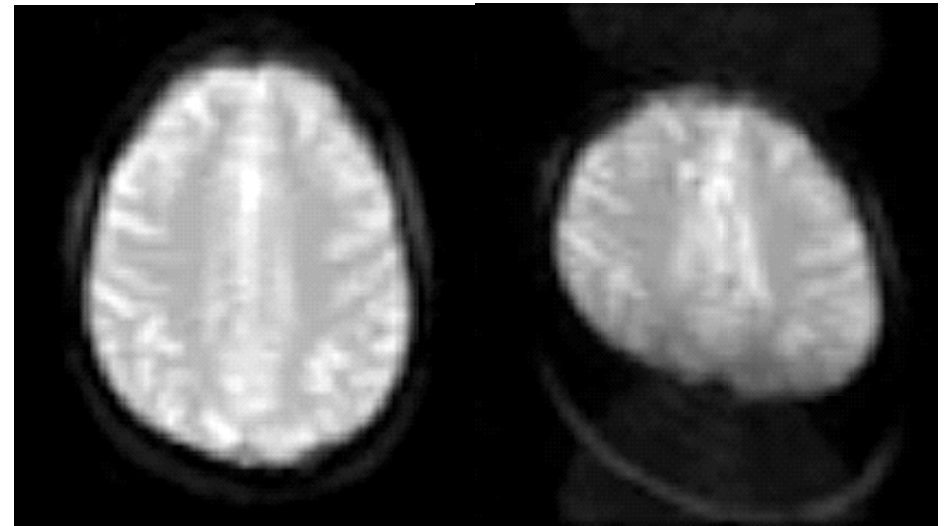
# k-Raum Variationen

---

**Amplituden-  
effekte**



**Phasen-  
effekte**

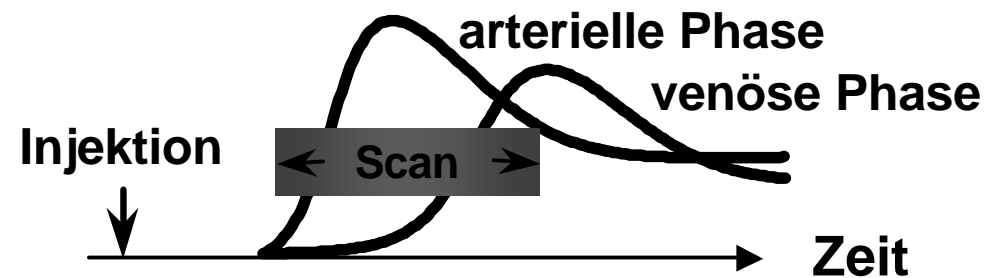
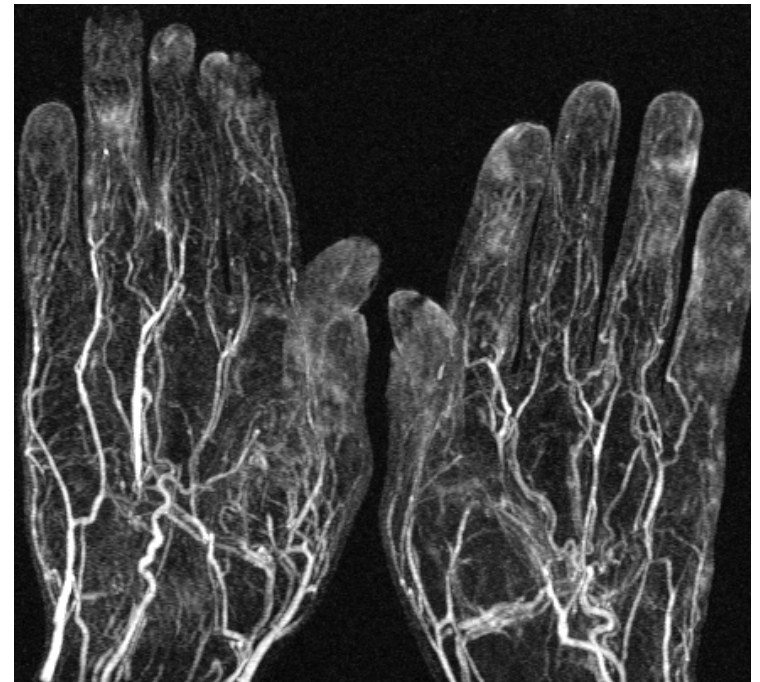


# Kontinuierliche Änderungen

---



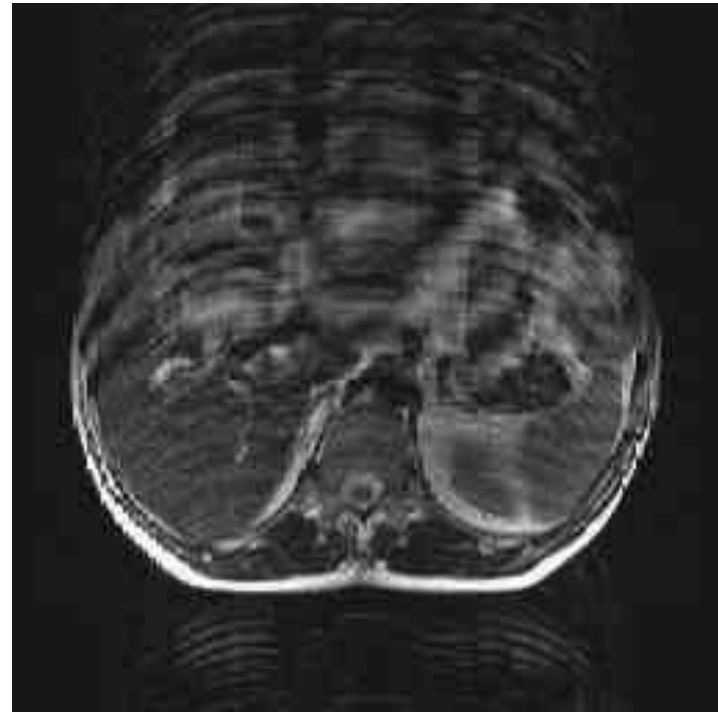
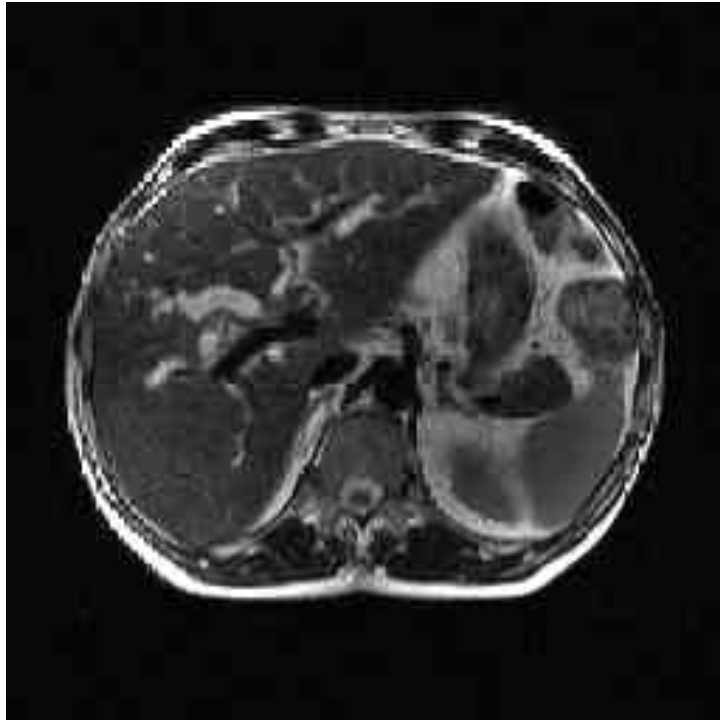
**Gutartig,  
können zur  
Variation des  
Bildkontrastes  
genutzt werden**



# Nichtkontinuierliche Änderung

---

Resultieren in Artefakten



# Point-Spread-Funktion

---

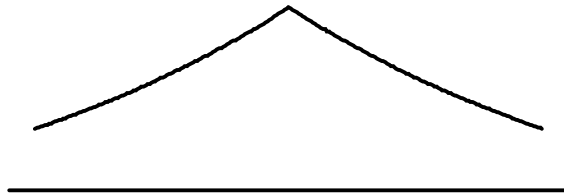
- **Kochrezept:**
  - Ideale k-Raum Daten eines punktförmigen Objektes generieren (auf k-Raum-Gitter)
  - MR-Rohdaten inklusive Amplituden- und Phasenmodulation erzeugen
  - Bild rekonstruieren
- **Beispiel: Punkt in Mitte, alles perfekt**
  - k-Raum identisch gleich 1
  - keine Relaxation (aber diskretes Sampling)
  - PSF = sinc (periodisch)  $\text{III}(x \text{ dw}) \otimes \text{sinc}(x \text{ dw size})$

# PSF bei Amplitudenvariation

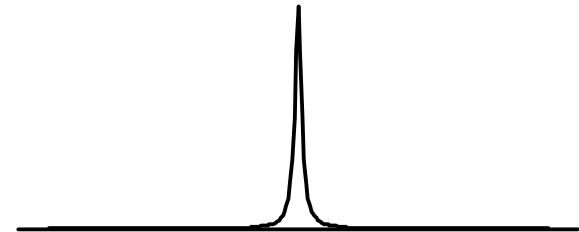
---

- **Echo (Leserichtung)**

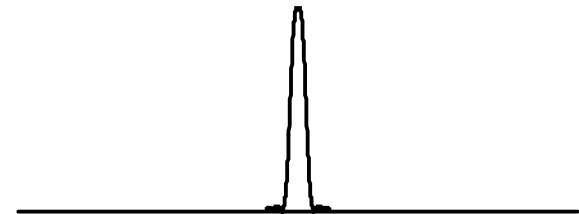
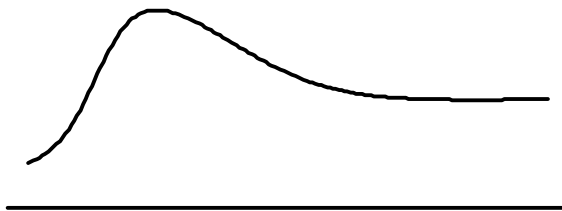
$$e^{-R_2^*|t|}$$



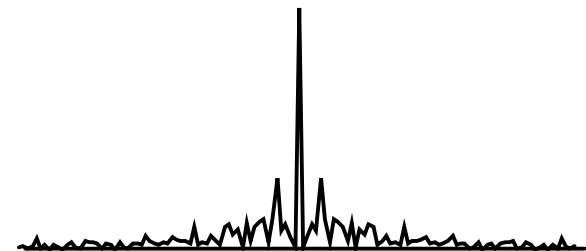
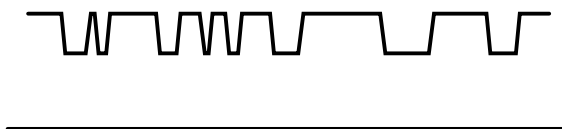
$$\frac{R_2^*}{R_2^{*2} + \omega^2}$$



- **KM (Phasenrichtung)**



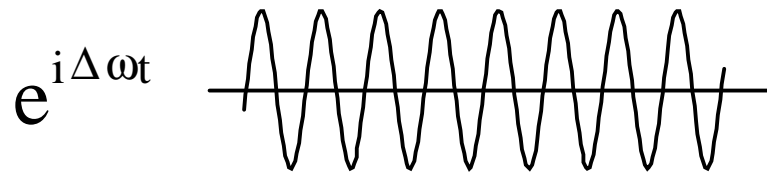
- **Bewegung (Phasenrichtung)**



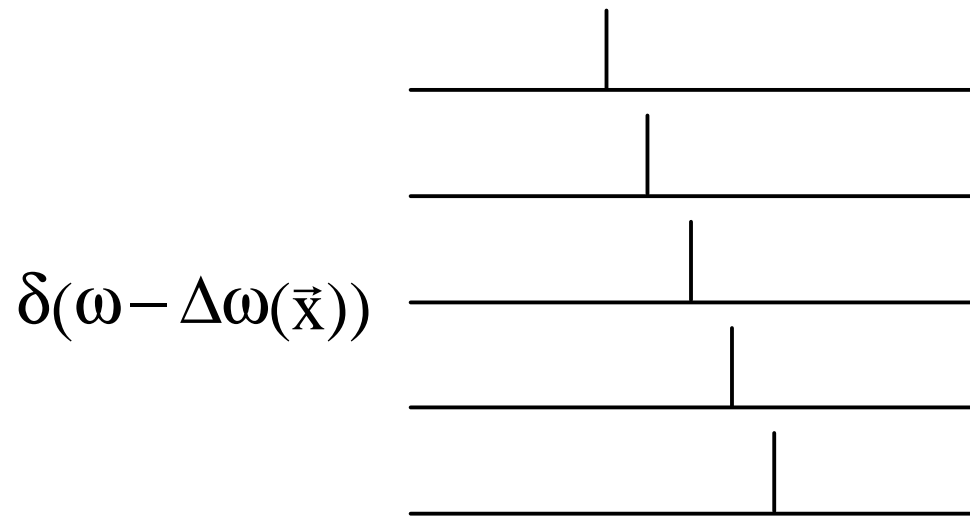
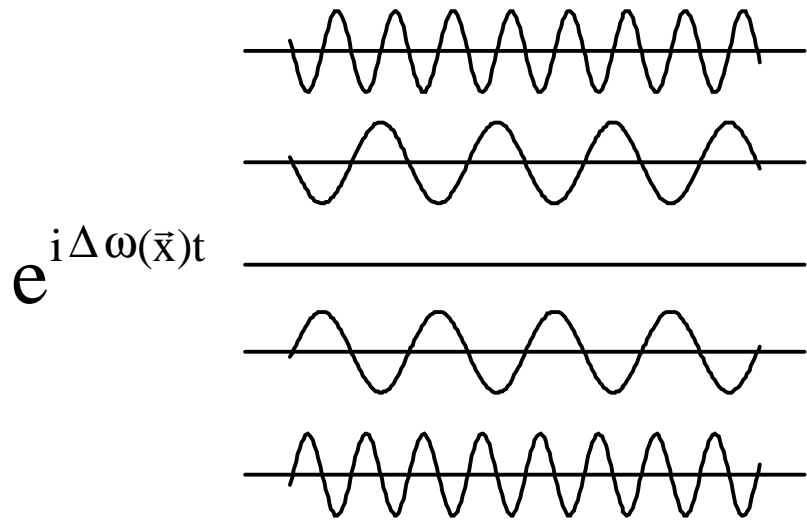
# PSF bei Offresonanz

---

- **Offresonanz**



- **Linearer Shim**



# RF-Pulse

---

- **T1, T2 wird vernachlässigt (Pulse kurz)**
- **Verhalten der Magnetisierung ist durch die Bloch Gleichung bestimmt:**

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma(\vec{M} \times \vec{B})$$

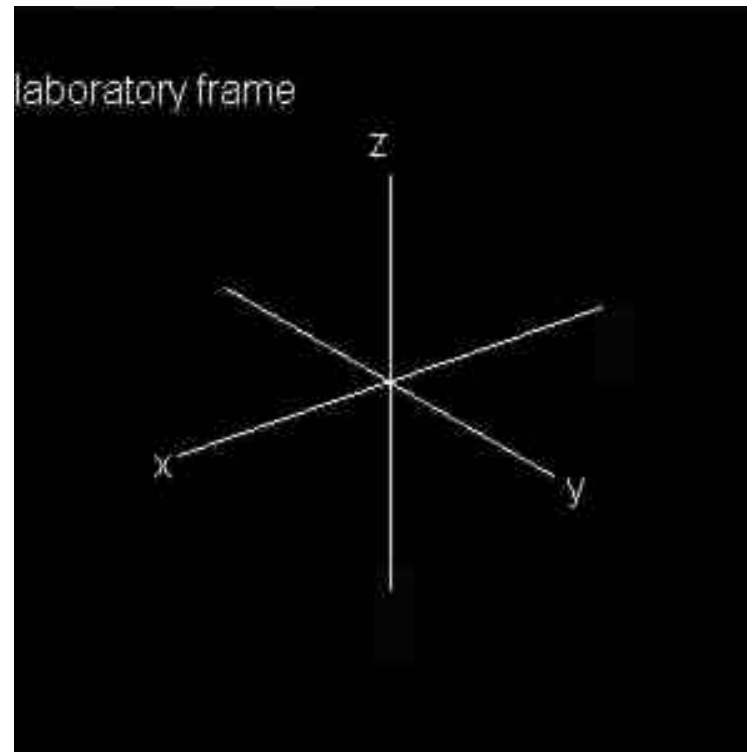
- **Nicht lineares Verhalten!**
- **Drehsinn: Magnetisierung dreht sich entgegen Uhrzeigersinn, wenn man in Richtung von B sieht.**

# Rotierendes Koordinatensystem

---

Es wird alles viel einfacher, wenn Magnetisierung im 'rotating frame' beschrieben wird

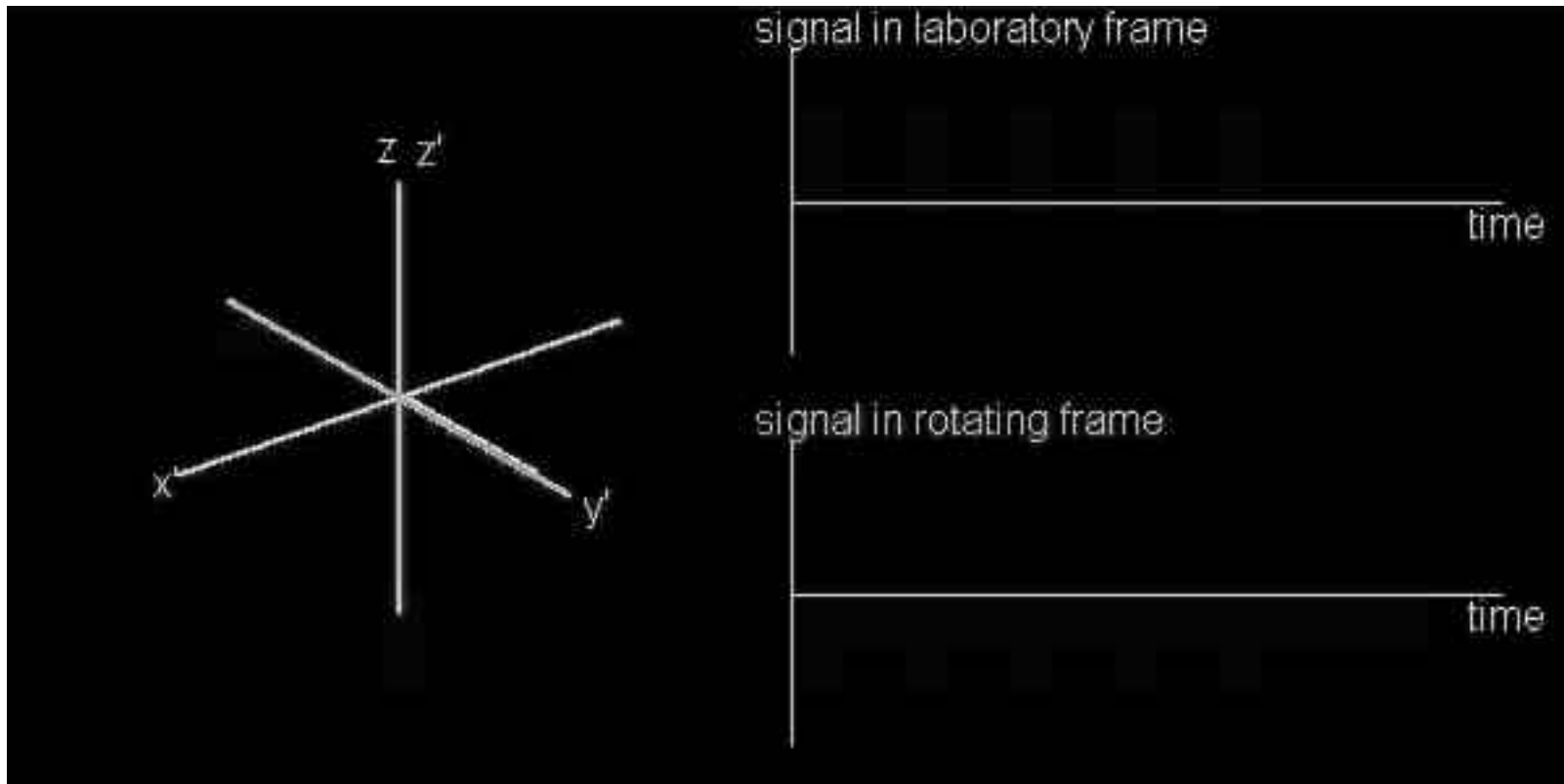
Das Koordinatensystem rotiert mit der Frequenz  $\omega_0$  um die z-Achse



# Rotating Frame

---

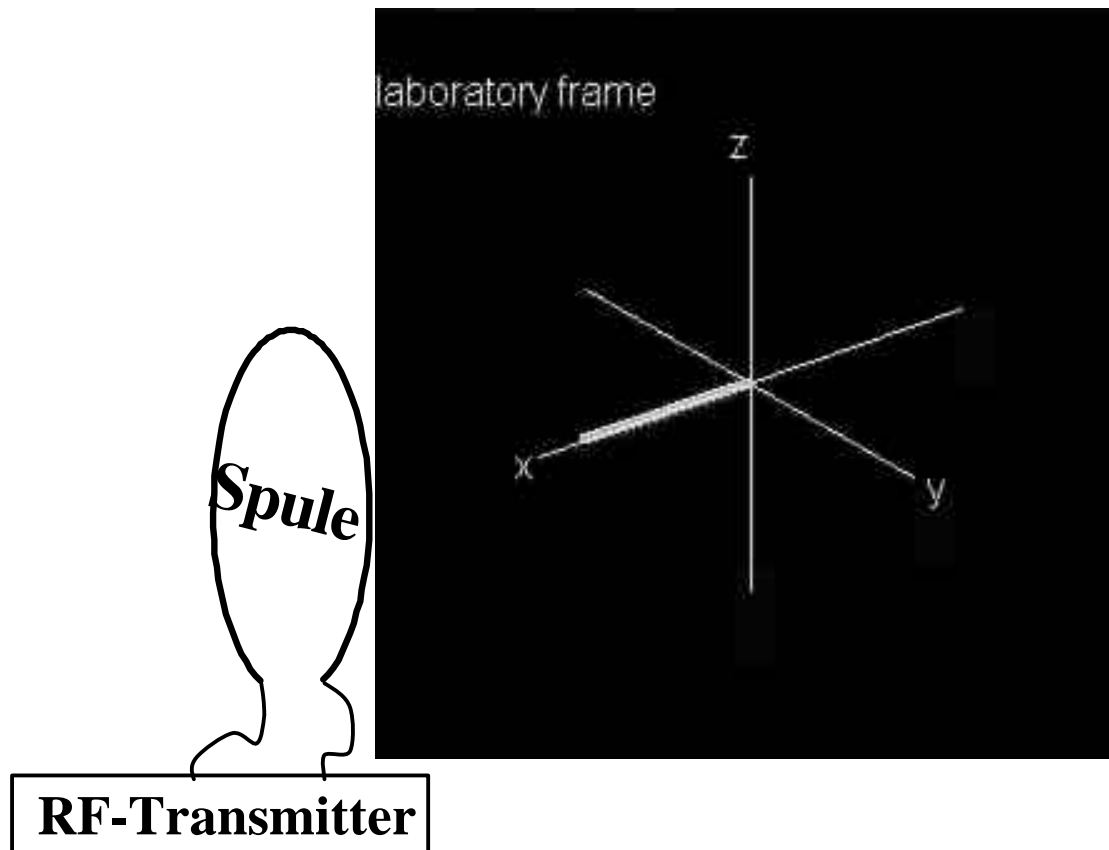
**Im mit  $\omega_0 = \omega_L$  rotierenden KS steht die transversale Magnetisierung still**



# RF-Pulse

---

**Magnetisierung (longitudinale und transversale)  
kann durch RF-Pulse manipuliert werden**

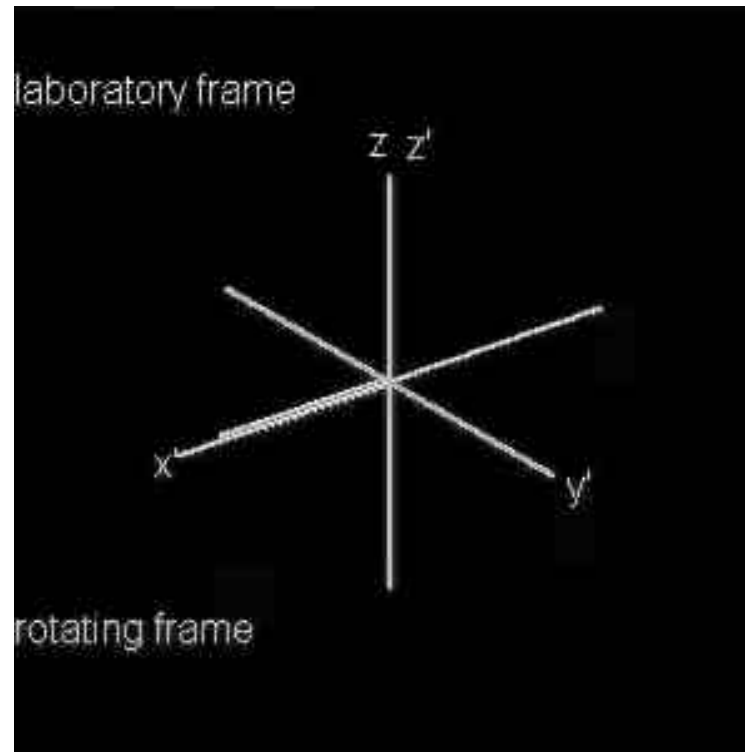


# RF-Pulse

---

**Ein linearer RF-Puls kann in zwei gegenläufig rotierende RF-Pulse zerlegt werden**

**Der Puls, der mit der  $\omega_0$  Frequenz rotiert, steht im rotierenden KS**



# Das Effektive Feld $B_{\text{eff}}$

---

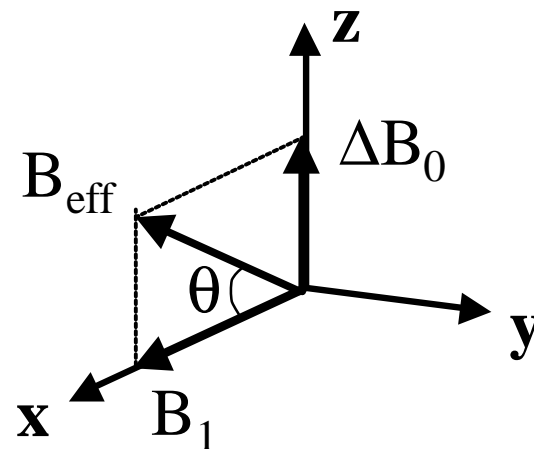
- **Beschreibung im mit  $\omega_0$  rotierenden KS:**

- statisches Feld:  $\Delta B_0 = (\omega_L - \omega_0)/\gamma$

- effektives Feld:  $B_{\text{eff}} = (\Delta B_0^2 + B_1^2)^{\frac{1}{2}}$

- **Orientierung von  $B_{\text{eff}}$  im rotierenden KS:**

$$\tan\theta = \frac{\Delta B_0}{B_1}$$



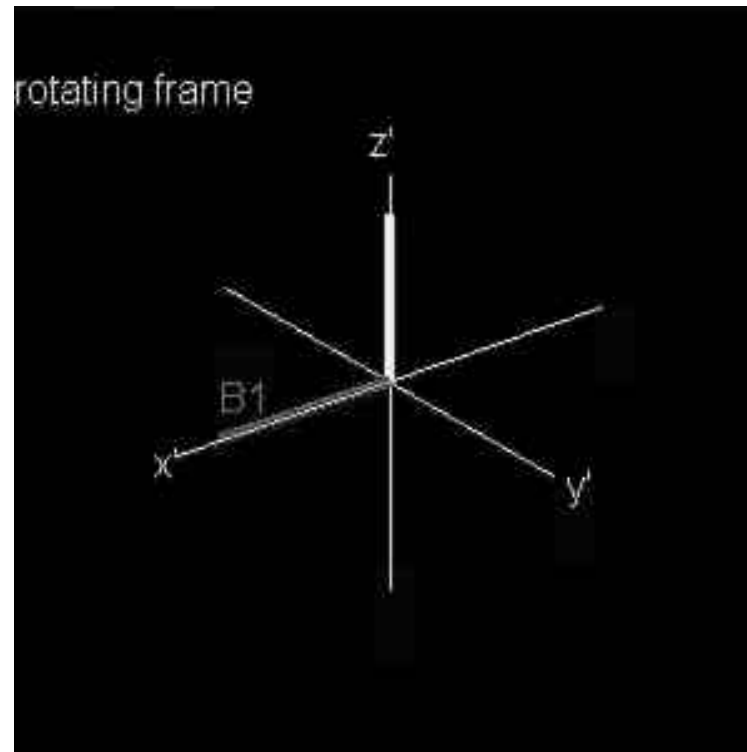
# Resonanter RF-Puls

---

Im rotierenden KS präzediert jede Magnetisierung  
um  $B_{\text{eff}}$

Der Flipwinkel ist  
durch die Stärke und  
die Dauer von  $B_{\text{eff}}$   
gegeben:

$$\alpha = \gamma B_{\text{eff}} t$$

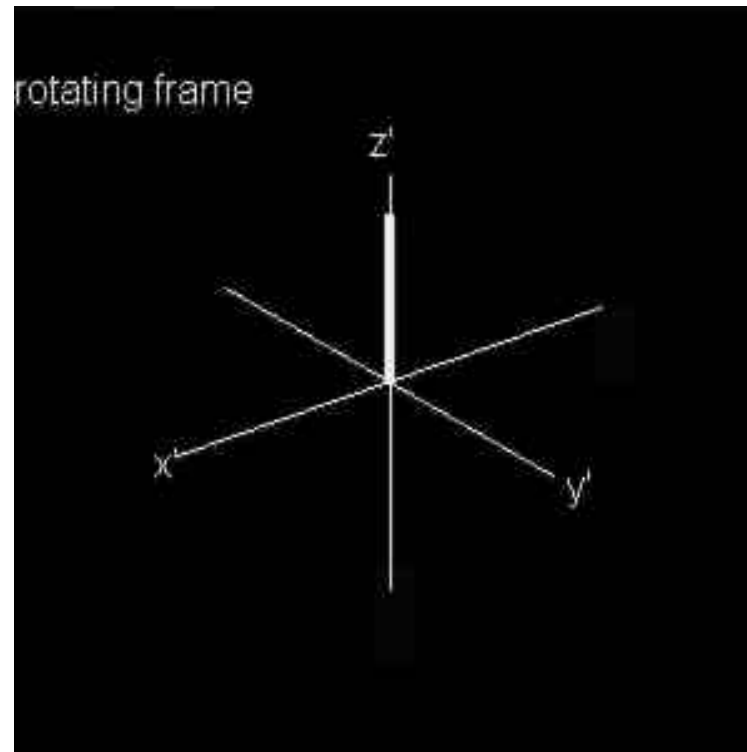


# RF-Anregung

---

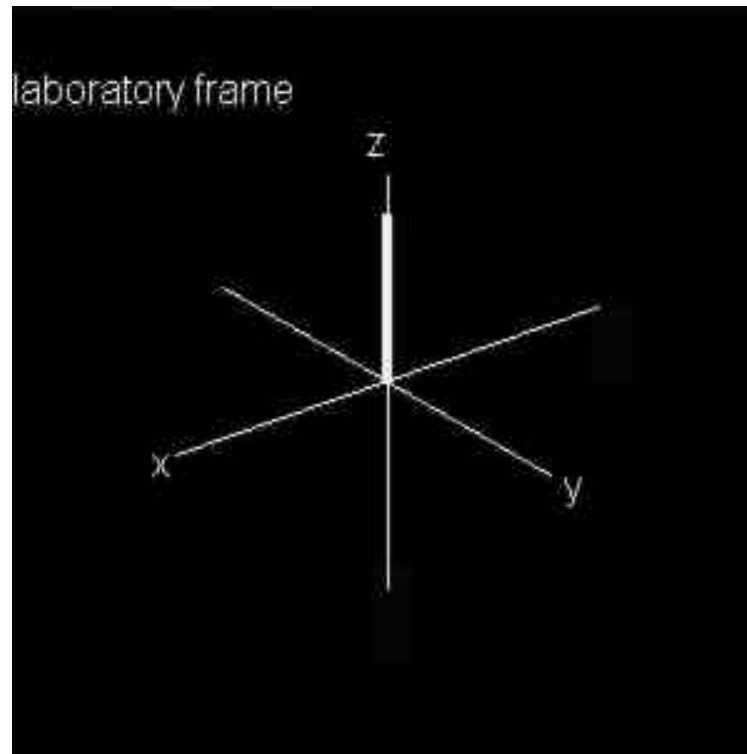
**Ein  $90^\circ$  Anregungspuls rotiert longitudinale in transversale Magnetisierung**

**Ein  $90^\circ$ -Pulse in  $x'$  rotiert Magnetisierung in die  $y'$ -Richtung**



# RF-Anregung im Labor KS

---

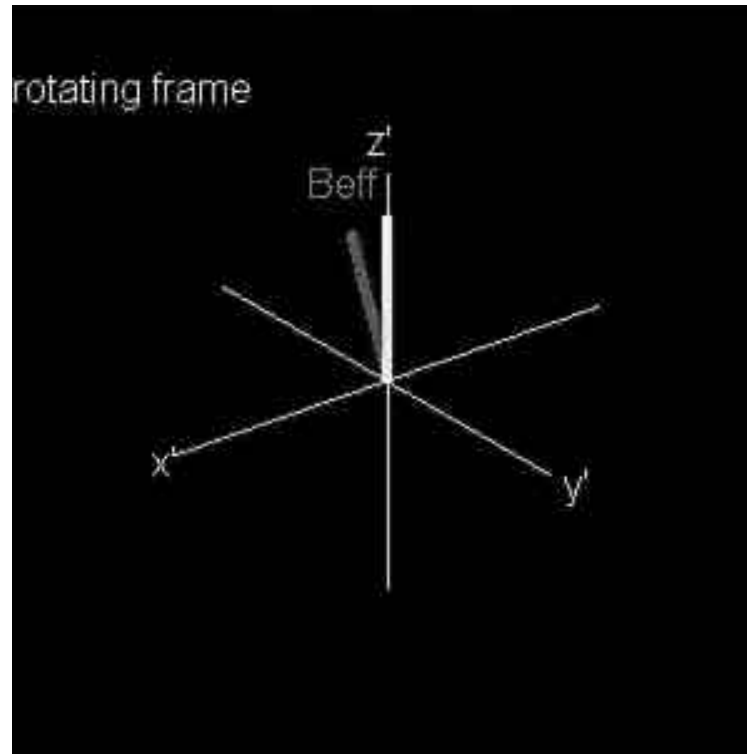


**Schön aber ein wenig unübersichtlich**

# Offresonanter RF-Puls

---

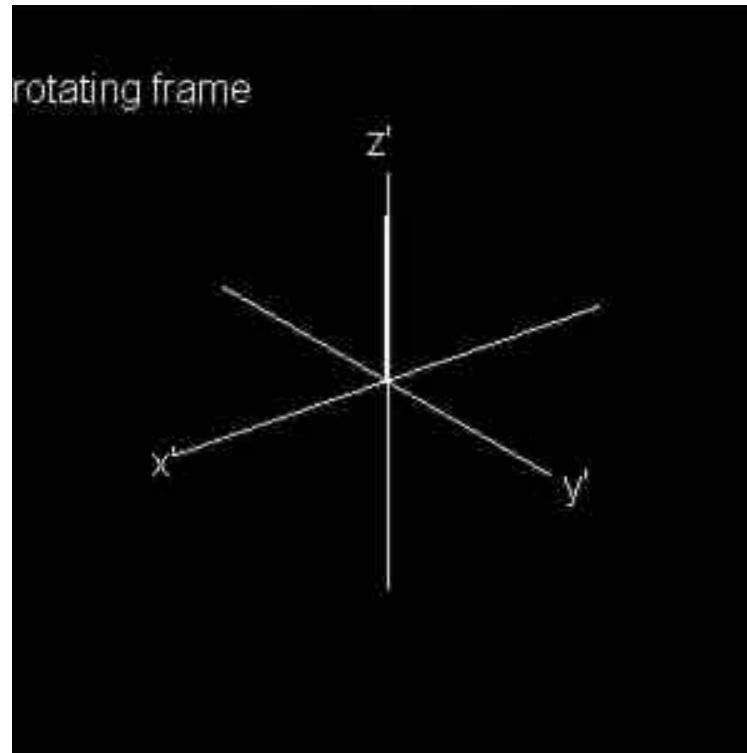
**Ein  $90^\circ$  Anregungspuls (1 ms Rechteckprofil) bei  
2000 Hz Frequenzoffset**



# Offresonanter RF-Puls

---

**Ein  $90^\circ$  Anregungspuls (1 ms Rechteckprofil) bei Frequenzoffsets von -2000 bis 2000 Hz (step 400)**

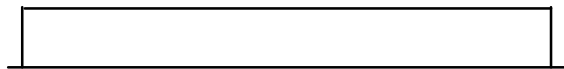
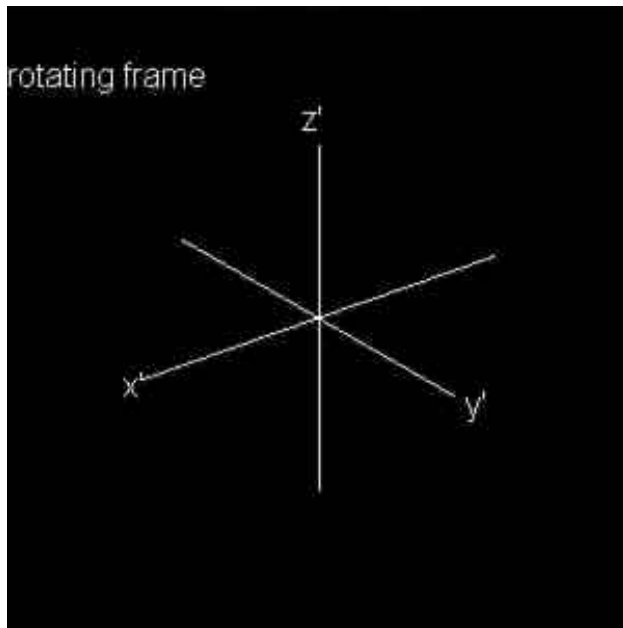


# Selektive RF-Pulse

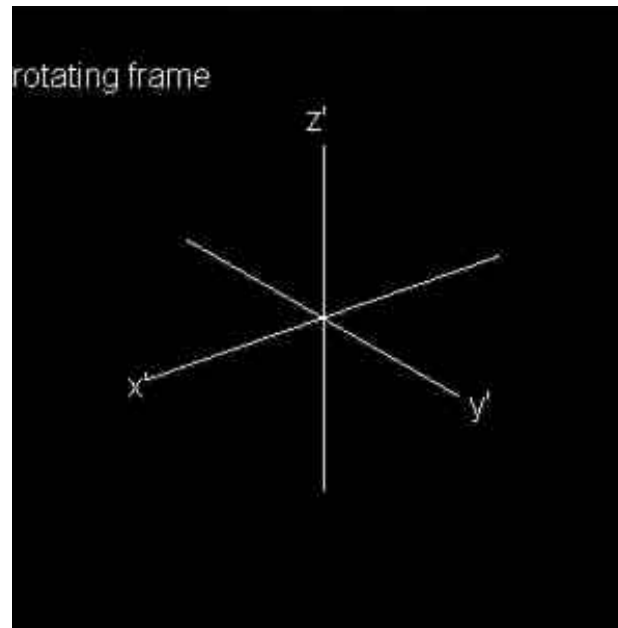
---

Ein  $90^\circ$  Anregungspulse (1ms) Frequenzoffsets von  
-2000 bis 2000 Hz

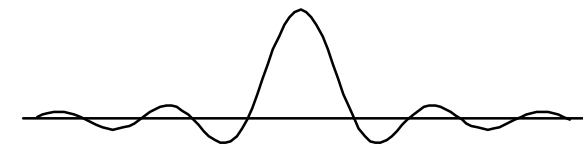
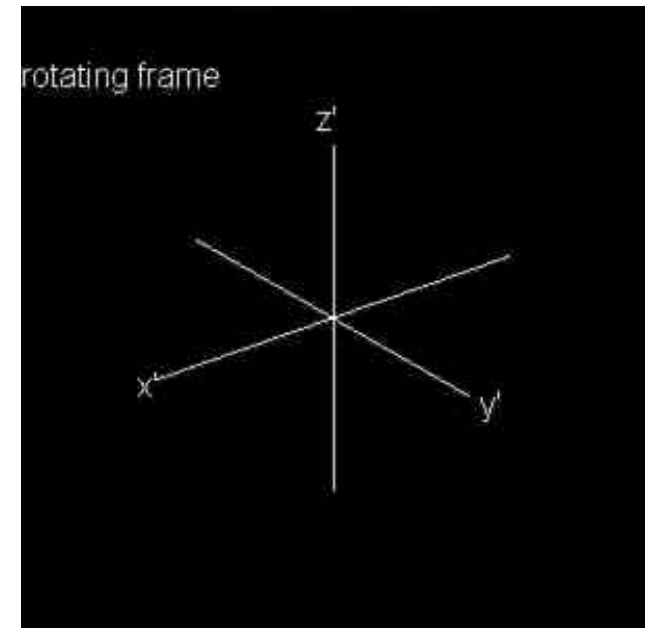
Rechteck



Gauß



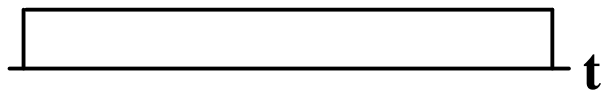
sinc5



# Magnetisierung nach dem Puls

---

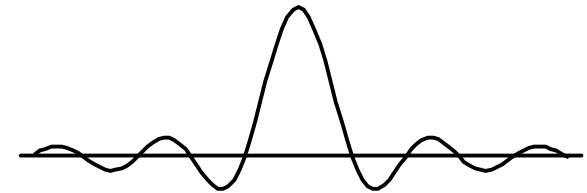
Rechteck



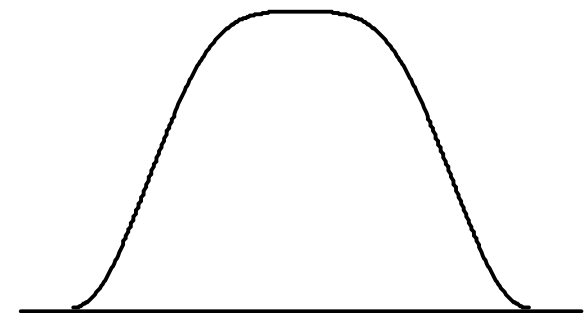
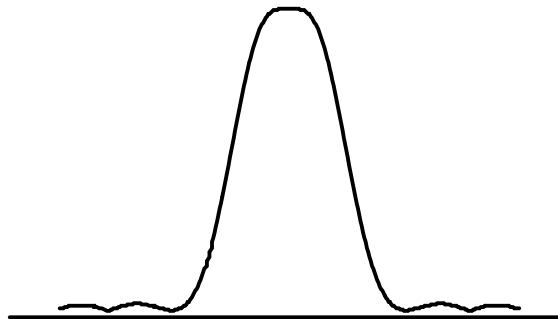
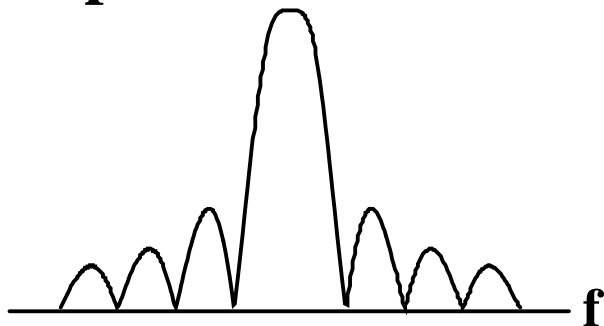
Gauß



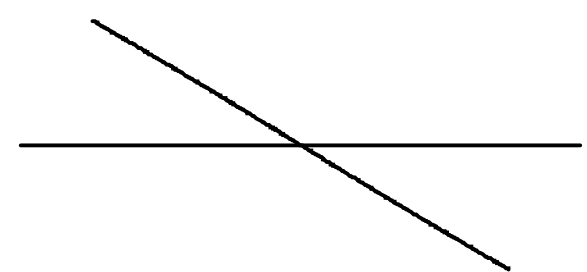
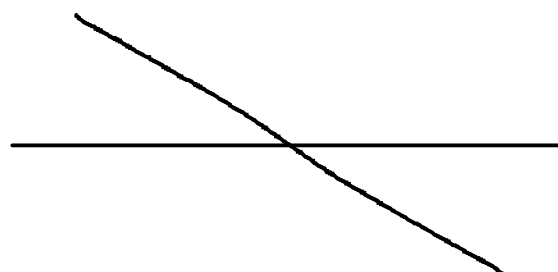
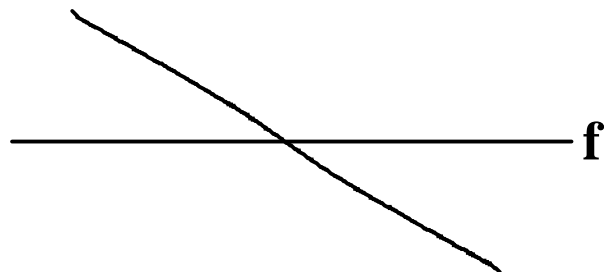
sinc5



Amplitude



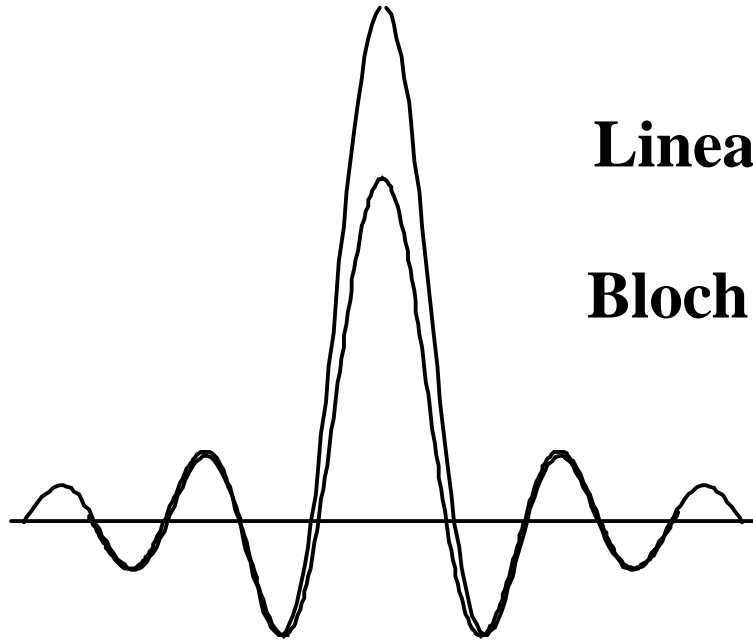
Phase



# Näherung für kleine Flipwinkel

---

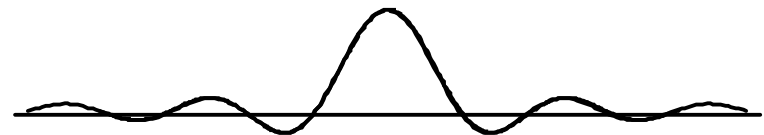
90° Flipwinkel



Lineare Rechnung

Bloch Gleichungen

10° Flipwinkel



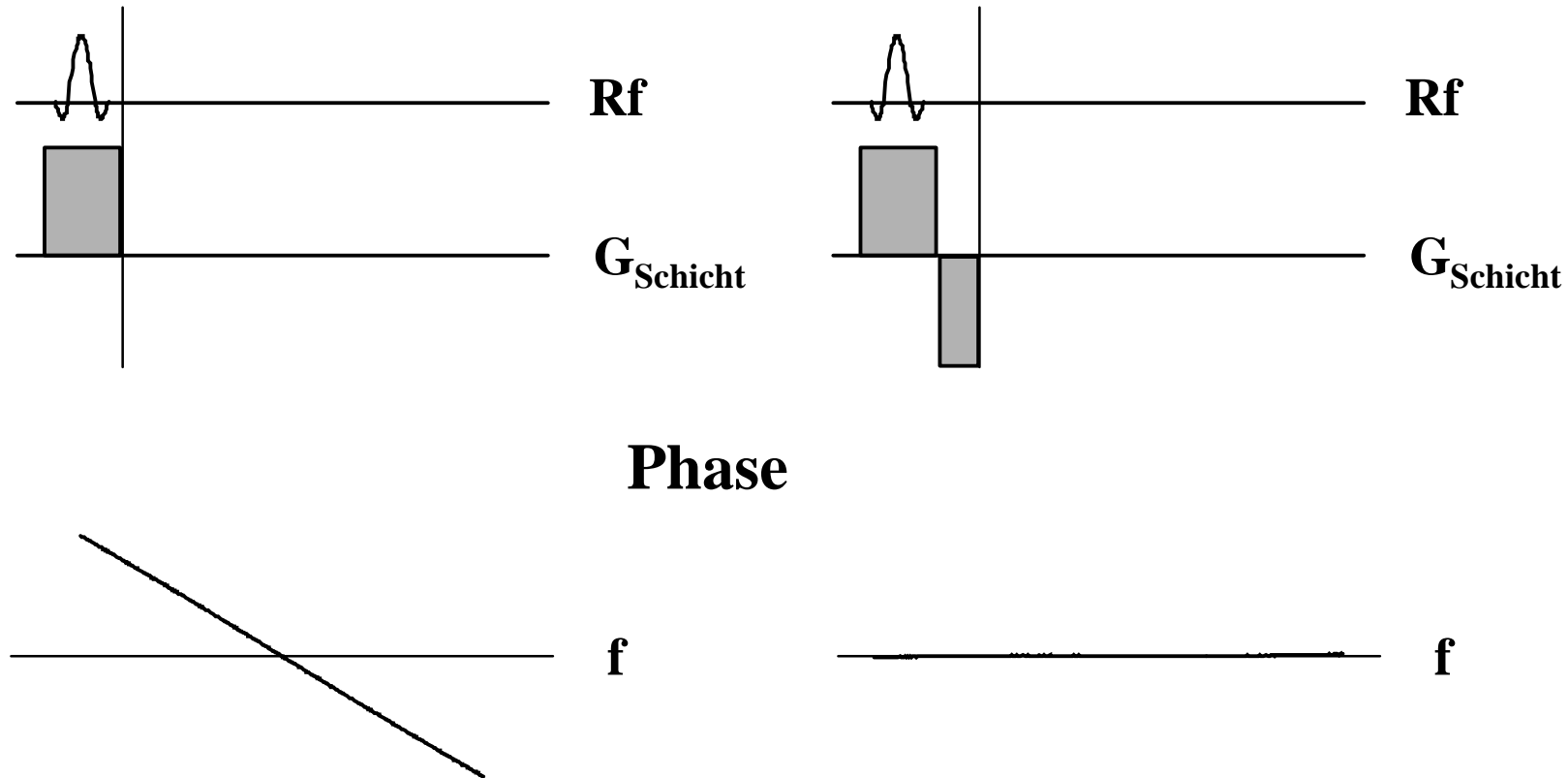
**Für kleine Flipwinkel kann das Pulsprofil durch  
Fouriertransformation genähert werden**

# Pulsgenerierung

---

- **Bloch Gleichung nicht analytisch invertierbar**
- **Inverses Problem (Pulsprofil aus gewünschtem Magnetisierungsprofil bestimmen) ist zu lösen.**
- **Iteratives FT-Verfahren (für Pulse  $< 90^\circ$ )**
- **try and error Verfahren**
- **...**

# Schichtgradient



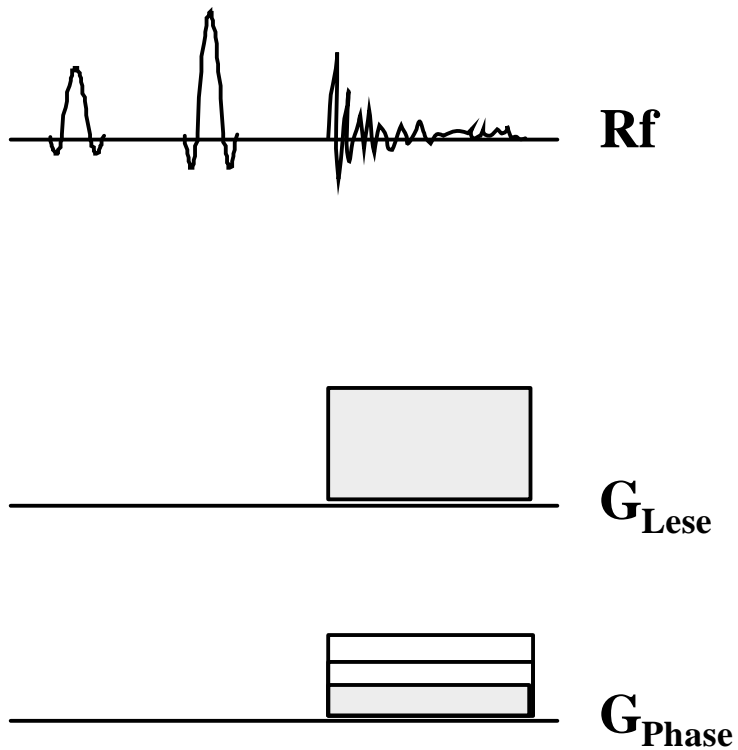
**Der RF-Puls unter einem Schichtgradient verursacht eine Dephasierung, die refokussiert werden muß (Fläche nicht notwendig 50%)**

# Erste Bildgebungssequenz

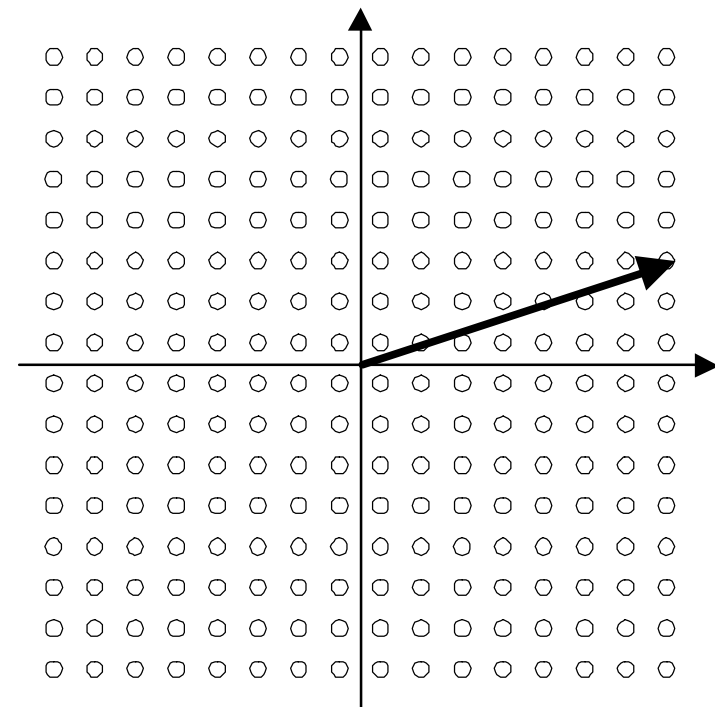
---

## Backprojektion

### Sequenz Diagramm



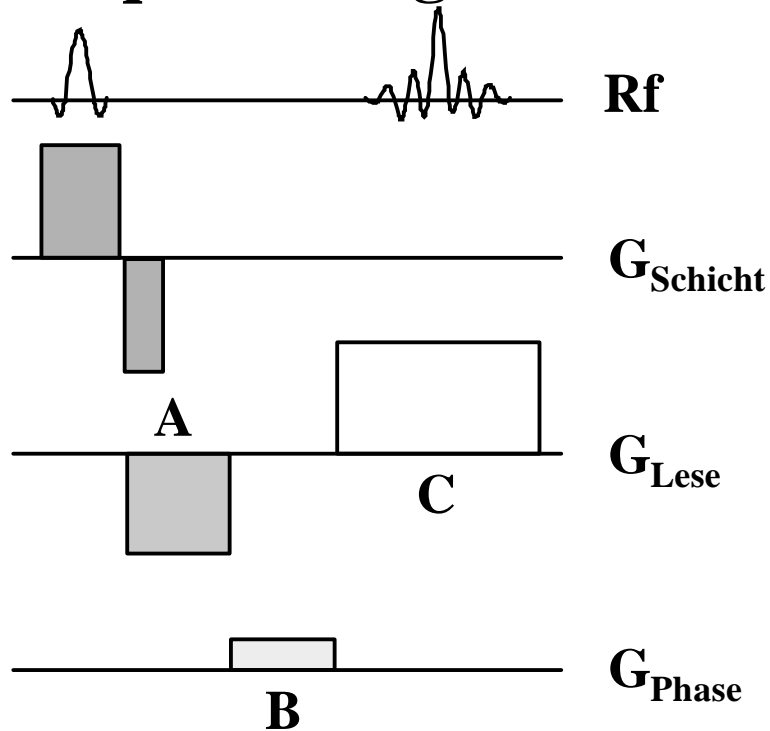
### k-Raum Trajektorie



# Gradientenecho

Die Gradientenflächen in Schicht- und Leserichtung müssen zum Echozeitpunkt kompensiert sein

## Sequenz Diagramm



## k-Raum Trajektorie

